Rechnen ist keine Glückssache!

Dieses Bild wurde mit Stapel Diffusion, einer sogenannten KI, erstellt.

Anmerkung

Die Bestimmung von Extrempunkten eines Funktionsgraphen ist ein wichtiger Bestandteil der Differentialrechnung und grundlegende Voraussetzung für die Anwendung der höheren Mathematik.

Um Schülern zu helfen, ist es wichtig, die Konzepte der Differentialrechnung in einfachen Worten zu erklären.

Eine übersichtliche Darstellung der dabei helfen, diese Konzepte besser zu verstehen. Kurze Zusammenfassungen sollen hilfreich sein, um das Verständnis zu verbessern.

Hier wird von einem praktischen und schülerorientierten Ansatz ausgegangen.

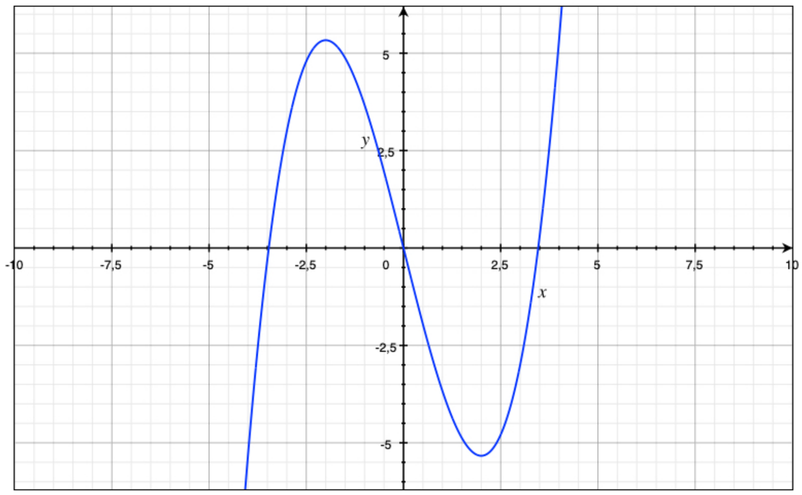
Ein Anhang zur Theorie ist zum Nachlesen angefügt.

Ralf Benzmann

Worum geht es?

Die zeichnerische Darstellung einer Funktion wird Graph genannt.
Ein Graph kann besondere Punkte besitzen.
In diesen Punkten kann sich sein Verlauf auf eine bestimmte Art und Weise ändern.
Ein Graph kann Extrempunkte, also Hoch- und Tiefpunkte, haben.
Hier erreicht der Funktionswert y = f(x) seinen größten oder kleinsten Wert.

Ein Beispiel zeigt das folgende Bild des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$:



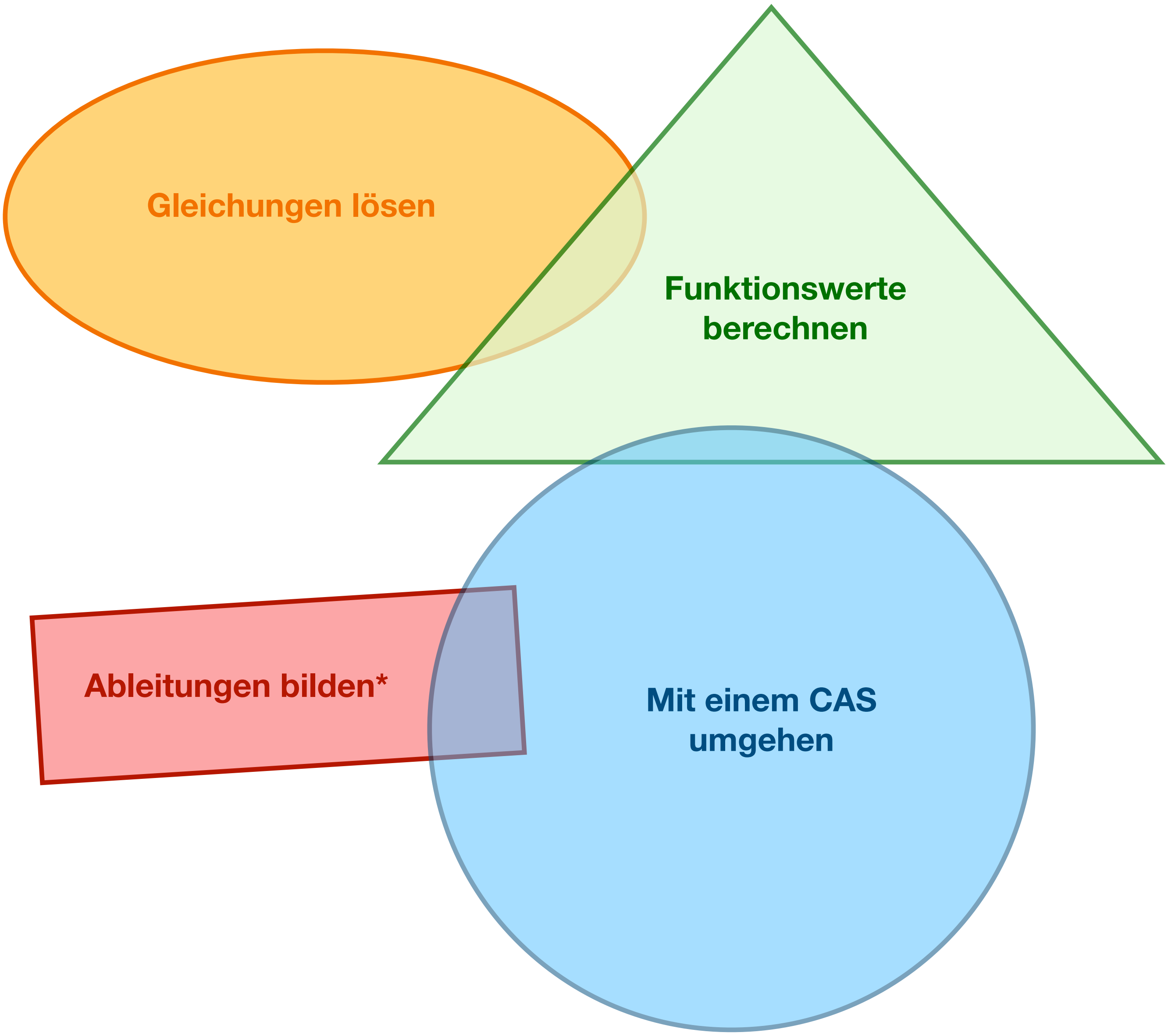
Was ist das Ziel?

Das Ziel besteht in der sicheren Beherrschung des Verfahrens zum Nachweis der Extrempunkte.
Dazu gehört auch die Berechnung ihrer Koordinaten.

Was brauchst du?

Die Funktionsgleichung y = f(x).
Ihre erste Ableitung f'(x).
Ihre zweite Ableitung f''(x).

Du kannst (Voraussetzungen):



* Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Konstantenregel

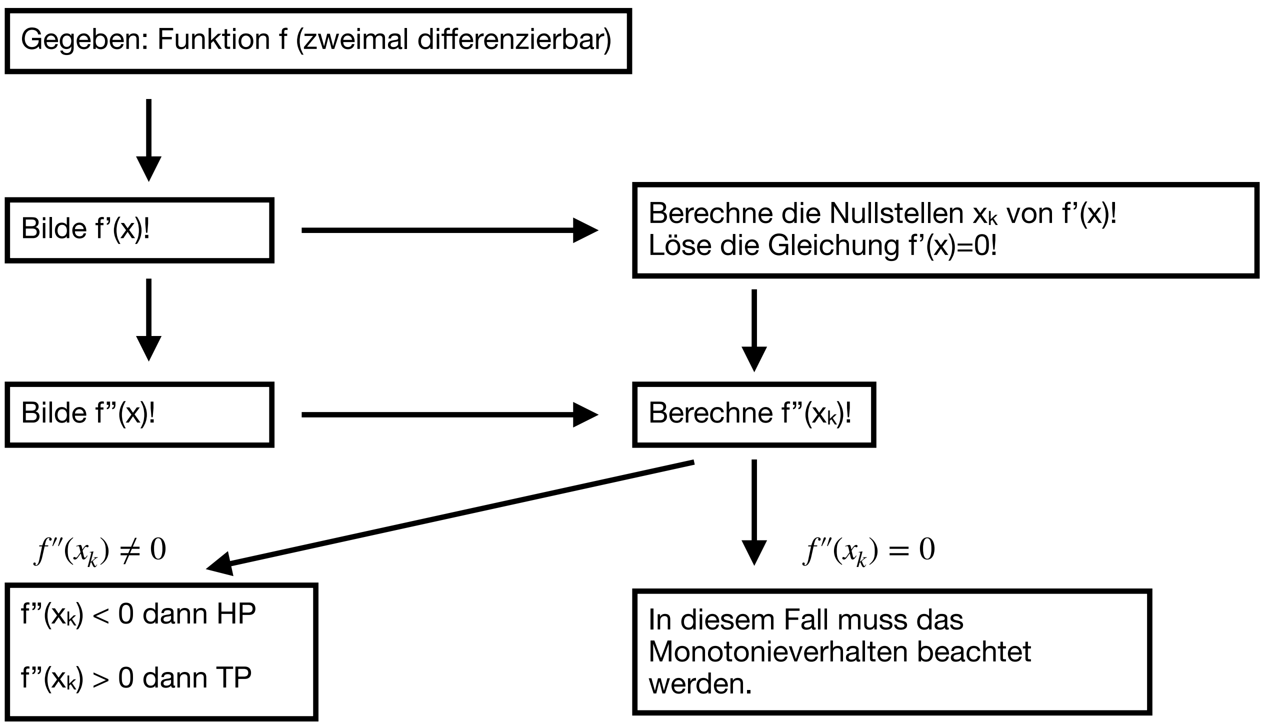
So wird es gemacht!

1. Bilde die erste Ableitung f'(x)!
   Setze die erste Ableitung gleich 0!
   Löse die Gleichung f'(x) = 0 nach x!
   Die Lösungen, falls vorhanden, werden mögliche Extremstellen genannt.
   Gibt es keine Lösungen, dann gibt es auch keine Extremstellen.

2. Bilde die zweite Ableitung f"(x)!
   Setze die in 1. gefundenen Lösungen nacheinander in f"(x) ein und rechne den Wert aus!
   Ist der Wert von f"(x) auch 0, dann ist es keine Extremstelle.
   Ist der Wert von f"(x) größer als 0, dann ist es eine Stelle für einen Tiefpunkt (Minimum).
   Ist der Wert von f"(x) kleiner als 0, dann ist es eine Stelle für einen Hochpunkt (Maximum).

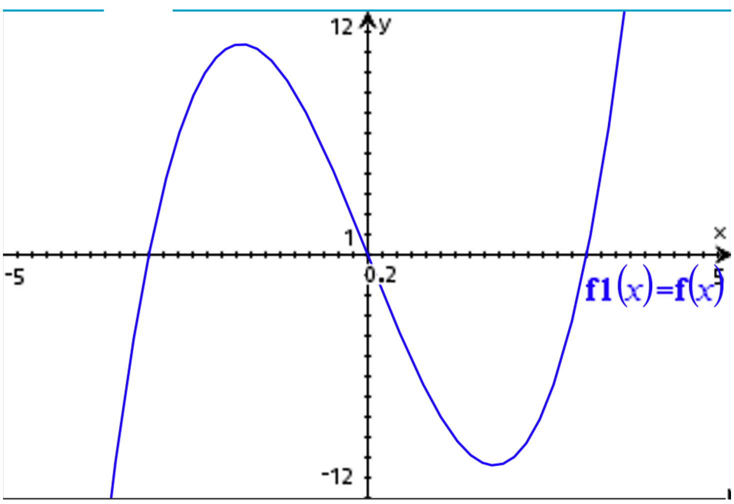
3. Setze die Lösungen aus 1. nacheinander in die Ausgangsgleichung f(x) ein!
   Berechne den Wert.
   Dieser Wert ist die y-Koordinate des Tief- oder Hochpunktes.
   Schreibe deine Ergebnisse sauber und übersichtlich auf!

Diese Vorgehensweise lässt sich auch folgendermaßen darstellen:

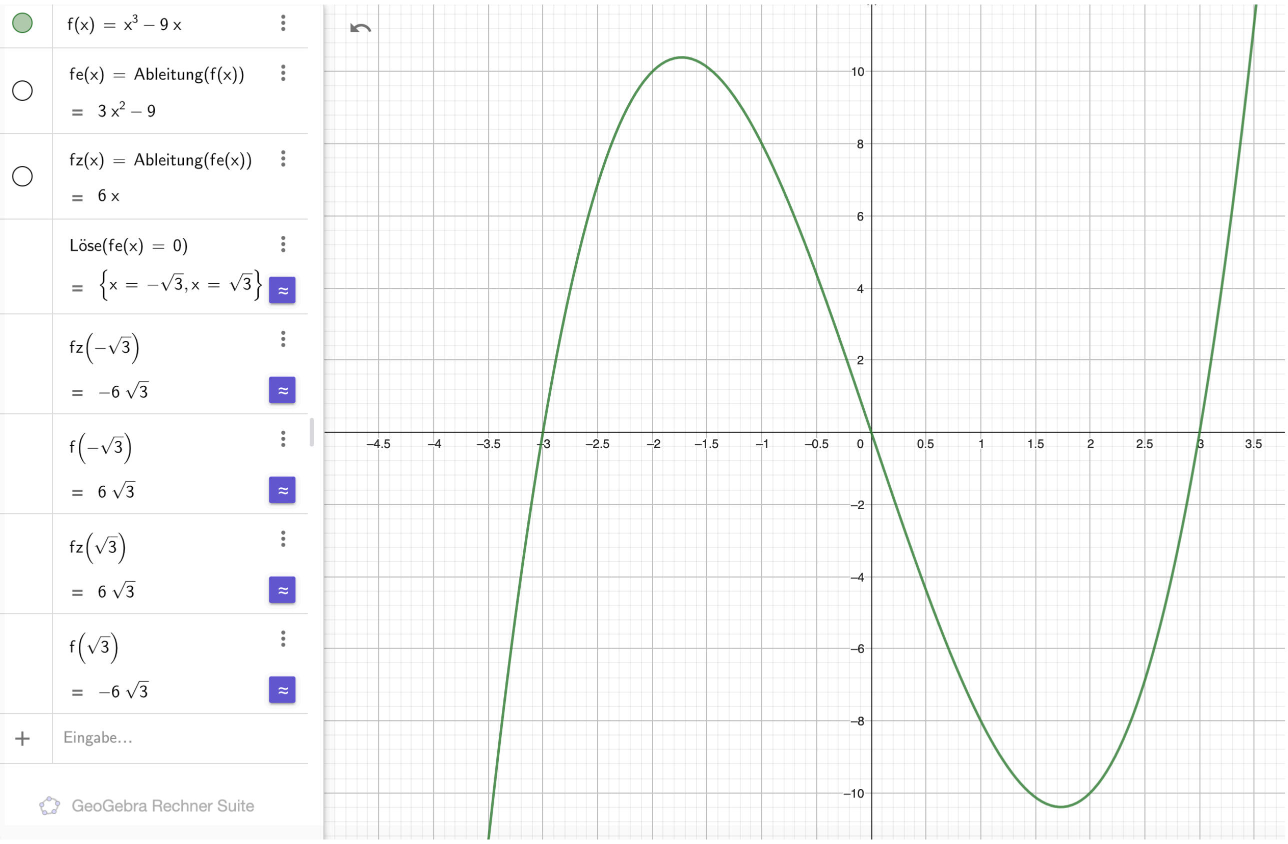


Beispielrechnung mit dem TI-nspire CX

$f(x):=x^3-9\cdot x$	Funktion definieren	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	Erste Ableitung bilden	$3\cdot x^2-9$
$3\cdot x^2-9 \rightarrow fe(x)$	mit ctrl+var als fe(x) speichern	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(fe(x))$	Zweite Ableitung bilden	$6\cdot x$
$6\cdot x \rightarrow fz(x)$	mit ctrl+var als fz(x) speichern	*Fertig*
$\text{solve}(fe(x)=0,x)$	Erste Ableitung 0 setzen und lösen	$x=-\sqrt{3}$ or $x=\sqrt{3}$
$fz(-\sqrt{3})$	erste Lösung in zweite Ableitung	$-6\cdot\sqrt{3}$
© kleiner 0, Stelle für Hochpunkt		
$f(-\sqrt{3})$	erste Lösung in Funktionsgleichung	$6\cdot\sqrt{3}$
© Hochpunkt $(-\sqrt{3}\,\vert 6\sqrt{3})$		
© gerundet $(-1,73\vert 10,4)$	Ergebnis aufschreiben	
$fz(\sqrt{3})$	zweite Lösung in zweite Ableitung	$6\cdot\sqrt{3}$
© größer 0, Stelle für Tiefpunkt		
$f(\sqrt{3})$	zweite Lösung in Funktionsgleichung	$-6\cdot\sqrt{3}$
© Tiefpunkt $(\sqrt{3}\,\vert -6\sqrt{3})$		
© gerundet $(1,73\vert -10,4)$	Ergebnis aufschreiben	



Beispielrechnung mit GeoGebra



Die Ergebnisse sind hier in einer Tabelle zusammengefasst:

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	$6\sqrt{3}$	$-6\sqrt{3}$
$f'(x)$	0	0
$f''(x)$	$-6\sqrt{3} < 0$	$6\sqrt{3} > 0$
	Hochpunkt	Tiefpunkt

Was muss ich aufschreiben?

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-\sqrt{3}) = -6 \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow HP$$

$$f''(\sqrt{3}) = 6 \cdot \sqrt{3} > 0 \Rightarrow TP$$

$$f(-\sqrt{3}) = 6 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow HP(-\sqrt{3} \mid 6 \cdot \sqrt{3})$$

$$HP(-1{,}73 \mid 10{,}4)$$

$$f(\sqrt{3}) = -6 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow TP(\sqrt{3} \mid -6\sqrt{3})$$

$$TP(1{,}73 \mid -10{,}4)$$

Die Farben beziehen sich auf die Abschnitte der Seite 5 „So wird es gemacht!“.

Ein Beispiel ohne CAS

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$$

$$0 = 4x^3 + 9x^2 + 4x$$

$$0 = x \cdot \underbrace{(4x^2 + 9x + 4)}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

$$0 = 4x^2 + 9x + 4 \quad | :4$$

$$0 = x^2 + \frac{9}{4}x + 1$$

$$x_{2|3} = -\frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64} - \frac{64}{64}}$$

$$\underline{x_2 \approx -1{,}64} \quad , \quad \underline{x_3 \approx -0{,}61}$$

$$f''(x) = 12x^2 + 18x + 4$$

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''(-1{,}64) \approx 6{,}76 > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''(-0{,}61) \approx -2{,}51 < 0 \Rightarrow HP$$

$$\underline{TP_1(0|0)} \quad , \quad \underline{TP_2(-1{,}64| -0{,}62)}$$

$$\underline{HP(-0{,}61 | 0{,}2)}$$

Typische Aufgabenformulierungen

- Untersuche den Graphen der Funktion f auf Extrempunkte!
- Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte!
- Wo hat der Graph von f eine waagerechte Tangente?
- Wo erreicht der Körper seine größte Höhe?
- Wann ist der Gewinn/ Umsatz am größten/ kleinsten?
- Wann wird die höchste/ tiefste Temperatur gemessen?
- Zu welchem Zeitpunkt ist das Wachstum einer Pflanze am größten?
- Bei welcher Dosis ist die Wirkung am größten?
- Für welche Maße wird der Flächeninhalt extremal?
- Für welche Maße wird das Volumen minimal?
- Für welche Maße ist der Materialverbrauch am kleinsten?
- An welcher Stelle x_0 ist der Abstand zweier Graphen minimal oder maximal?
- Welches Extremum besitzt die Differenzfunktion d zweier Funktionen f und g?
  Welcher Art ist es?
- Für welche Punkte ist der Abstand zweier Geraden im Raum minimal oder maximal?

Theorie

Untersuchung einer Funktion f auf lokale Extrema an der Stelle x_0.

1. Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung

SATZ:
Wenn eine Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat und in x_0 differenzierbar ist, so gilt: $f'(x_0) = 0$.

Das diese Bedingung nicht hinreichend ist, zeigt das Beispiel $f(x) = x^3$.
Es ist $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 0$, aber der Graph hat bei $x_0 = 0$ keinen Extrempunkt.

2. Hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung

SATZ:
Es sei f eine an der Stelle x_0 zweimal differenziertere Funktion, für die gilt
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.
Dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, und zwar,
ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$,
ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$ gilt.

Diese Bedingung kann auch anders formuliert werden.

SATZ:
Gelten für eine Funktion f folgende Bedingungen:
1. **f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar,**
2. **$f'(x_0) = 0$,**
3. **f' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen,**

dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, und zwar
ein lokales Maximum, wenn f' mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten übergeht,
ein lokales Minimum, wenn f' mit wachsendem x von negativen zu positiven Werten übergeht.

Übungsaufgaben

Einstieg

Berechne Typ und Koordinaten der Extrempunkte von $f(x) = x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3$!

Lösung: TP (0| 0), HP (2| 1,33)

Mittelstufe

Berechne Typ und Koordinaten der Extrempunkte von $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^2 - 1$!

Lösung: TP (-1,414| -5), HP (0| -1), TP (1,414| -5)

Berechne Typ und Koordinaten der Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2 \cdot x^3 + 2x$!

Lösung: HP (-2,376| 6,93), TP (-0,595| -0,784) und zwei weitere Punkte spiegelbildlich dazu

Profi

Berechne Typ und Koordinaten der Extrempunkte von $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2 \cdot x^3 + 2x$ in Abhängigkeit von $a \in R$!

Lösung: Es ist eine Fallunterscheidung notwendig!

a = 0: TP (0| 0)

a ungleich 0: TP (-3a| -27 a^4), kein TP bei (0| 0)