

TÄGLICHE ÜBUNGEN

GRAPHISCHE AUFGABEN

Die sogenannten „Täglichen Übungen“ sollten grundlegender Bestandteil des Mathematikunterrichts sein.

Dieser Übungsteil befasst sich mit Funktionen und ihren Anstiegen.

Ausgehend von den Grundbegriffen wird schrittweise der Graph der ersten Ableitung erstellt.

Die Aufgaben 1 bis 5 befassen sich mit den Grundlagen.

Der Schwierigkeitsgrad steigt dabei ab Aufgabe 6 an.

Ralf Benzmann

2024

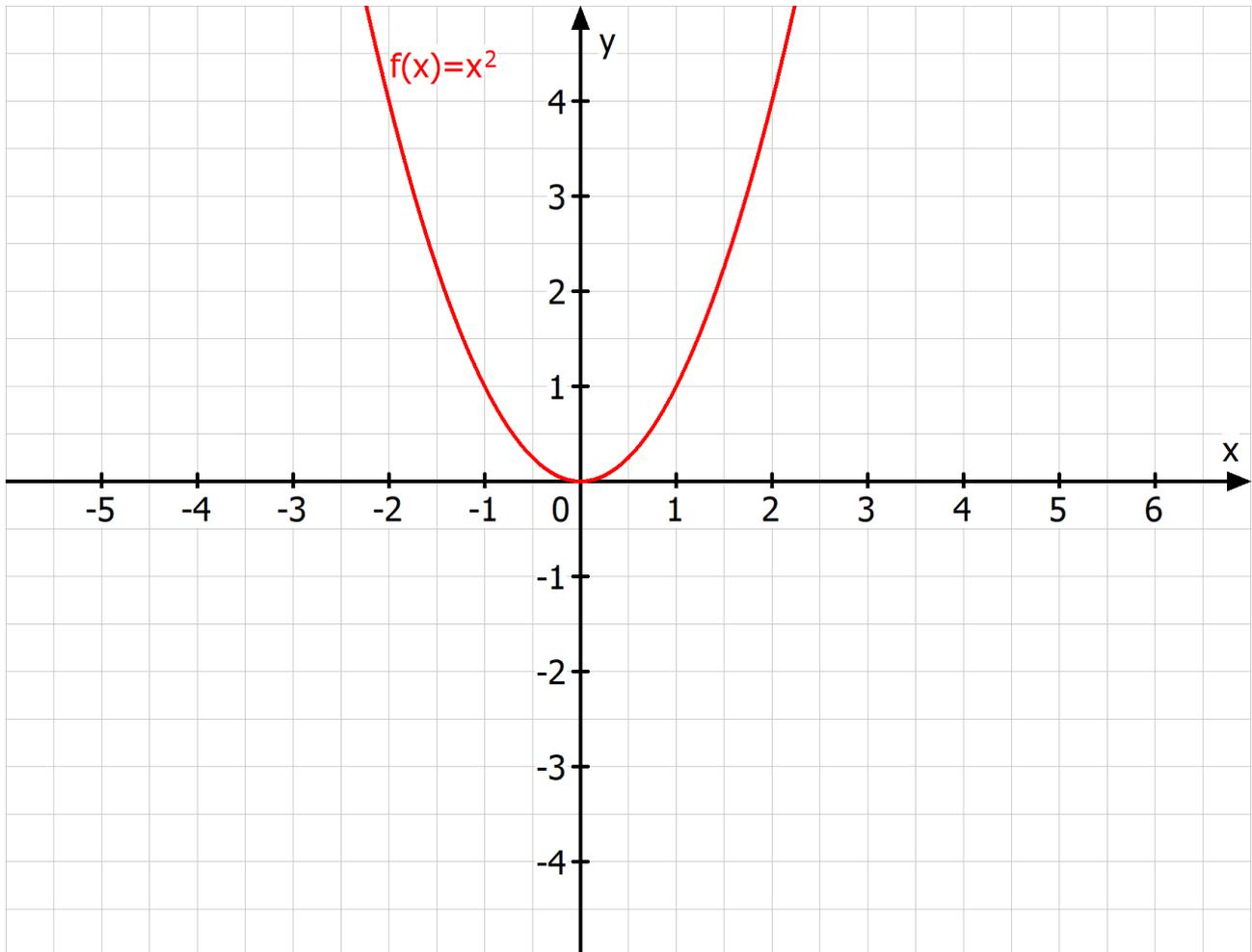
Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe Tangente, Sekante, Passante, Normale	4
2. Winkel messen	7
3. Gleichungen ablesen	9
4. Gleichungen aufstellen	11
5. Winkel berechnen	13
6. Anstiegswerte als Funktion (1)	15
7. Anstiegswerte als Funktion (2)	18
8. Anstiegswerte als Funktion (3)	21
9. Anstiegswerte als Funktion (4)	23
10. Anstiegswerte als Funktion (5)	25

Name: _____ Datum: _____

1. GRUNDBEGRIFFE TANGENTE, SEKANTE, PASSANTE, NORMALE

Gegeben ist die folgende Abbildung:



Markiere und beschrifte die folgenden Punkte:
 $A(1,5 | 2,25)$, $B(-1 | 1)$, $C(2 | 0)$.

Zeichne die folgenden Geraden ein:

- Die Tangente t_1 an den Graphen im Punkt A.
- Die Sekante s_1 durch den Punkt $O(0 | 0)$ parallel zu t_1 .
- Die Passante p_1 durch den Punkt C parallel zu t_1 .
- Die Tangente t_2 an den Graphen im Punkt B.
- Die Normale n_1 durch den Punkt B.

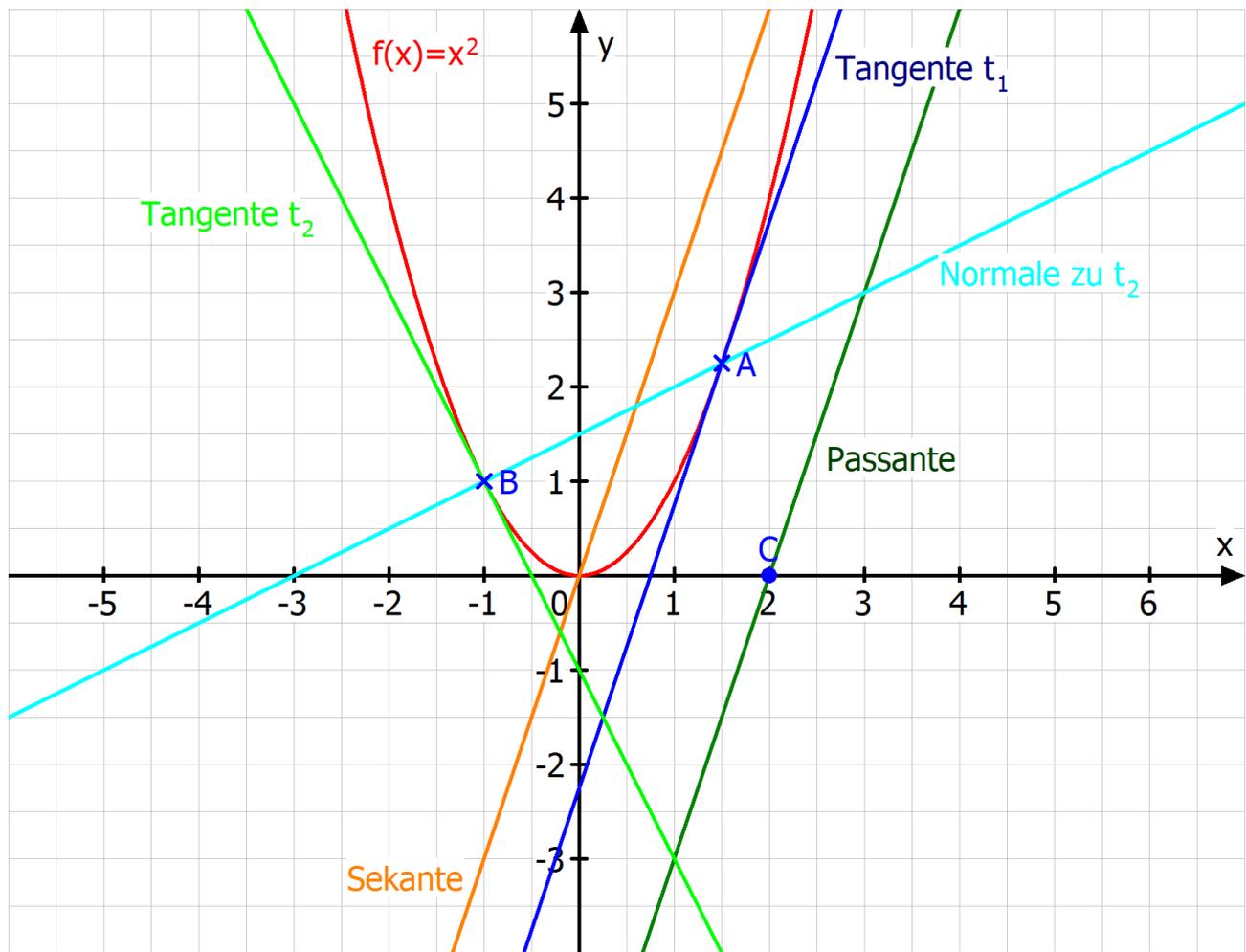
Auf der Rückseite findest du eine Tabelle.

Trage dort alle Geradengleichungen ein!

Trage hier alle Geradengleichungen ein:

Tangente t_1	
Sekante s_1	
Passante p_1	
Tangente t_2	
Normale n_1	

LÖSUNGEN

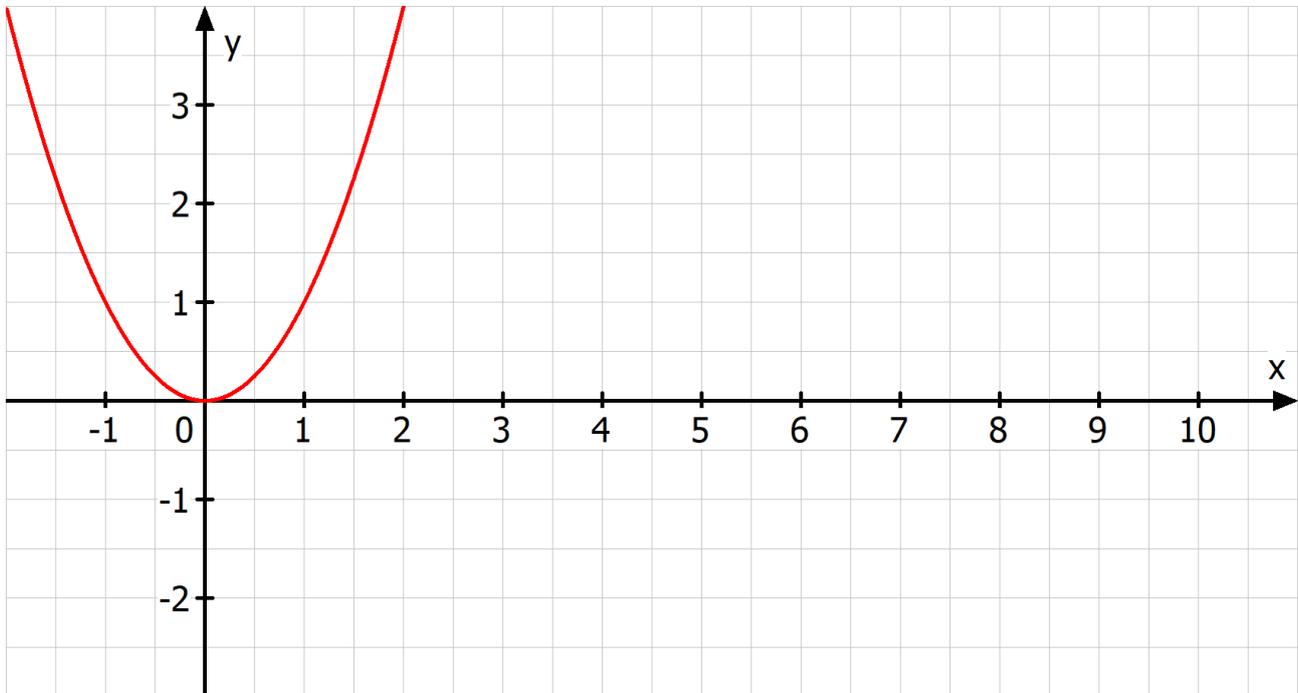


Tangente t_1	$t_1(x) = 3x - 2,25$
Sekante s_1	$s_1(x) = 3x$
Passante p_1	$p_1(x) = 3x - 6$
Tangente t_2	$t_2(x) = -2x - 1$
Normale n_1	$n_1(x) = 0,5x + 1$

Name: _____ Datum: _____

2. WINKEL MESSEN

Gegeben ist die folgende Abbildung:



Markiere und beschrifte den Punkt $A(1,5 | 2,25)$!
Zeichne im Punkt A die Tangente t an den Graphen ein!

Zeichne die folgenden Winkel ein:

α : Winkel zwischen der x-Achse und der Tangente.

β : Winkel zwischen der Tangente und der y-Achse.

Bestimme die Größe der Winkel und trage hier deine Ergebnisse ein:

α	
β	

Zeichne im Punkt A die Normale n an den Graphen ein!

Zeichne die folgenden Winkel ein:

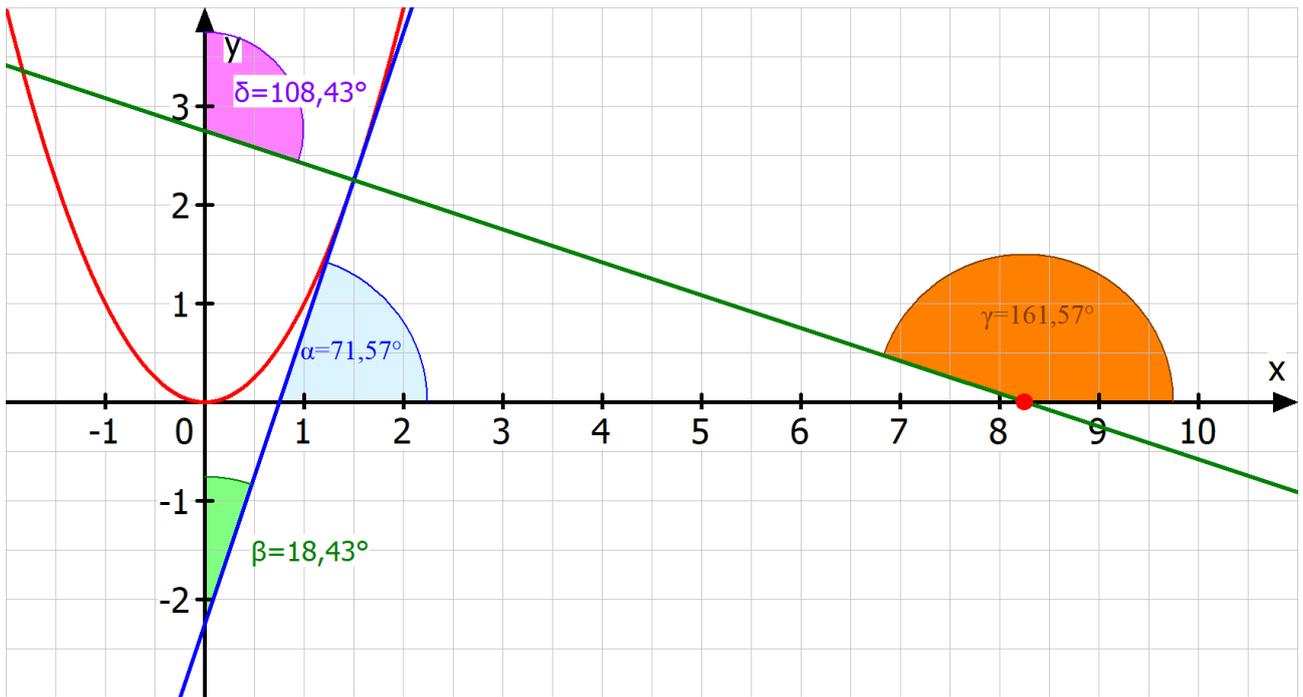
γ : Winkel zwischen der x-Achse und der Normale

δ : Winkel zwischen der Normale und der y-Achse.

Bestimme die Größe der Winkel und trage hier deine Ergebnisse ein:

γ	
δ	

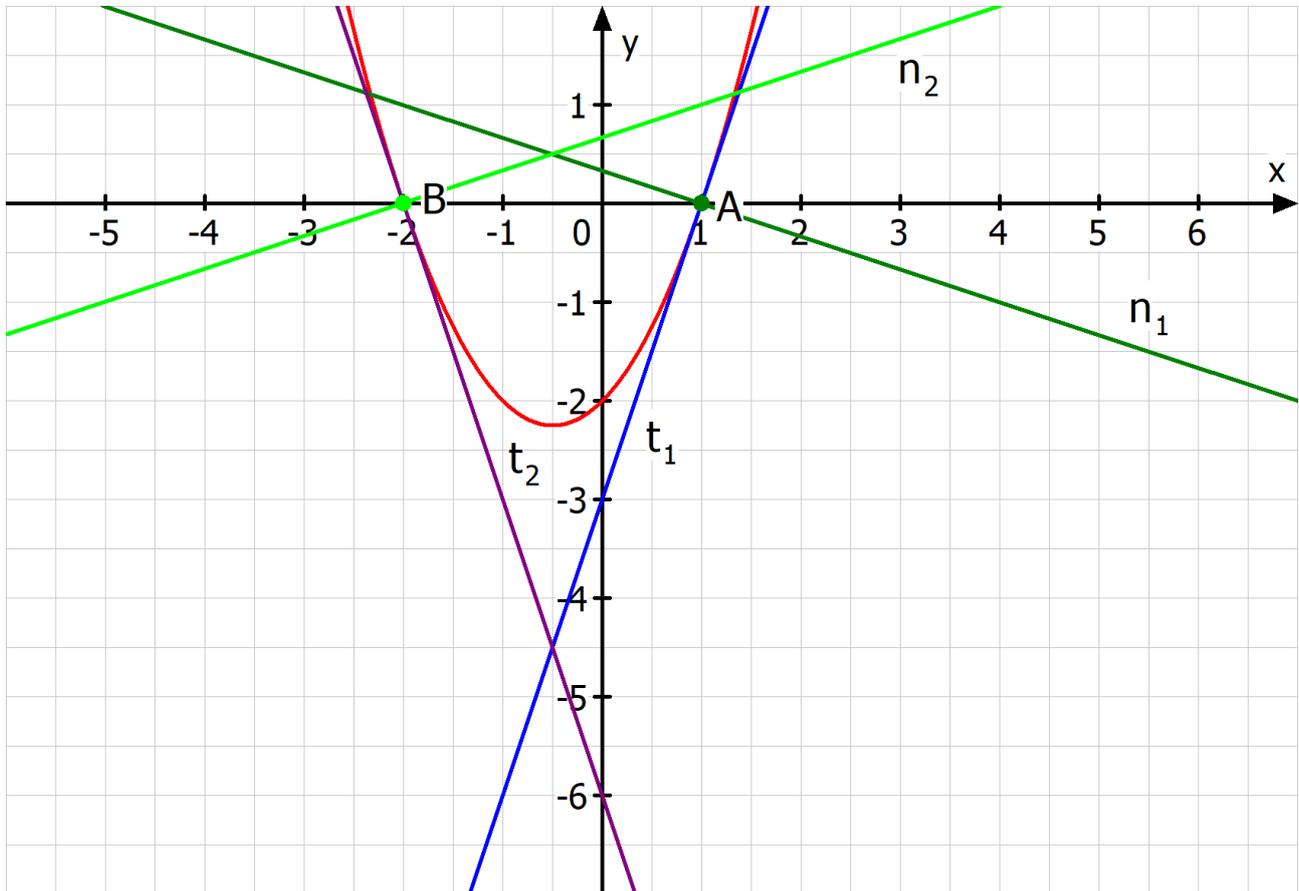
LÖSUNGEN



Name: _____ Datum: _____

3. GLEICHUNGEN ABLESEN

Gegeben ist die folgende Abbildung:



In dieser Abbildung findest du die Tangenten t_1 und t_2 sowie die Normalen n_1 und n_2 .

Stelle für diese vier Geraden die Geradengleichungen auf, indem du die erforderlichen Werte der Abbildung entnimmst!

Überprüfe rechnerisch für jedes Paar Tangente - Normale die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung!

LÖSUNGEN

$$t_1: y = 3x - 3, n_1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

Wegen $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ ist die Orthogonalitätsbedingung erfüllt.

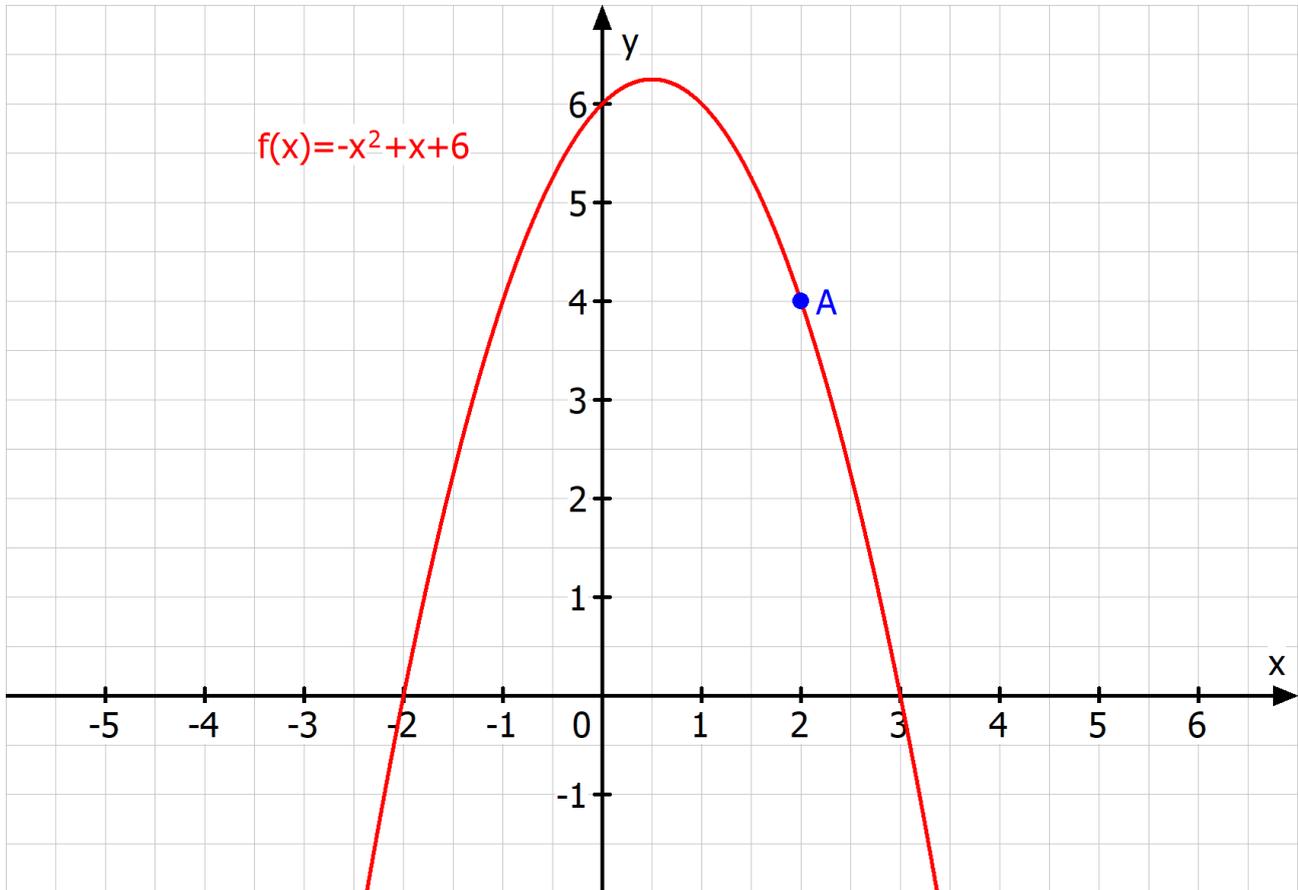
$$t_2: y = -3x - 6, n_1: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Wegen $(-3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -1$ ist die Orthogonalitätsbedingung erfüllt.

Name: _____ Datum: _____

4. GLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Gegeben sind die Funktion $f(x) = -x^2 + x + 6$ und der Punkt $A(2|4)$.



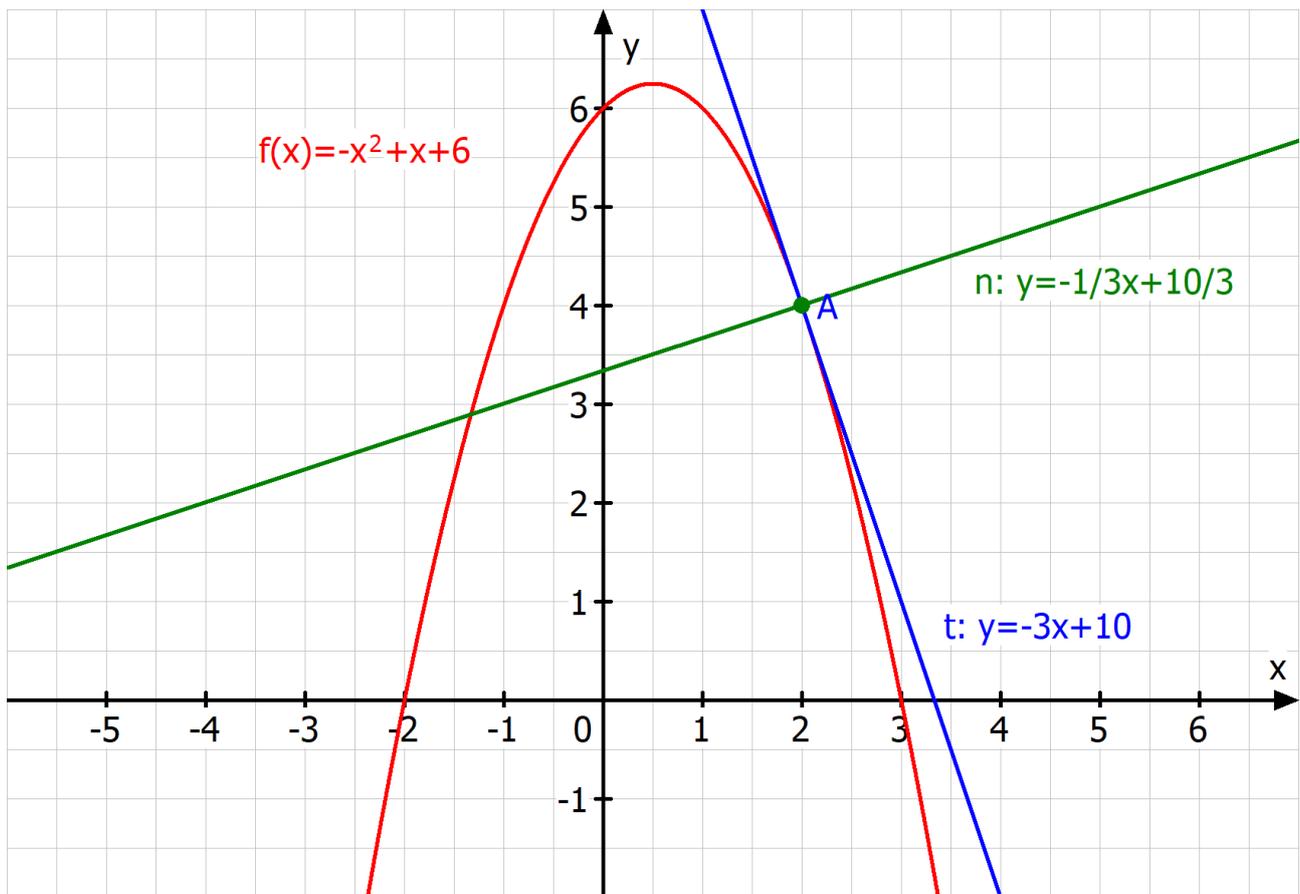
Gesucht sind die Gleichungen der Tangente t und der Normale n im Punkt A .

Stelle diese Gleichungen rechnerisch auf!

Zeichne beide Geraden ein!

Beschrifte sie!

LÖSUNGEN



Rechnung für die Tangente t:

$$f'(x) = -2x + 1, m = f'(2) = -3, 4 = -3 \cdot 2 + n, n = 10, t: y = -3x + 10$$

Rechnung für die Normale n:

$$m = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}, 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 + n, n = \frac{10}{3}, n: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

Name: _____ Datum: _____

5. WINKEL BERECHNEN

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Gegeben sind die Punkte $A(-2 | 0)$ und $B(-1 | 0)$.

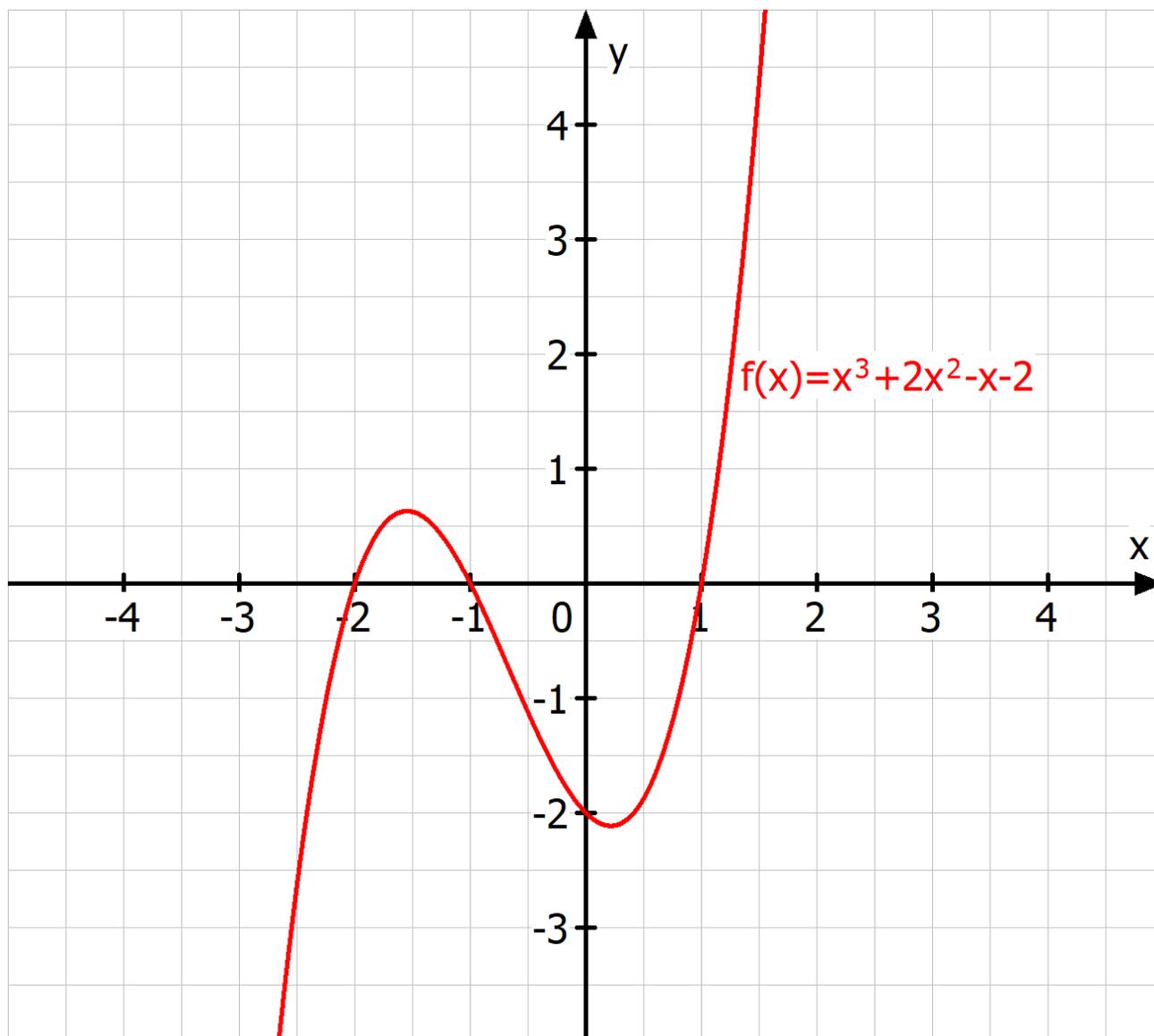
Berechne den Anstieg und den Anstiegswinkel des Graphen von f in jedem dieser Punkte!

In den Punkten A und B werden die Tangenten t_A und t_B an den Graphen von f gelegt.

Berechne ihren Schnittwinkel α !

ZUSATZAUFGABE

Berechnen den Schnittpunkt S der Tangenten t_A und t_B !



LÖSUNGEN

1. Für $A(-2|0)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1, m = f'(-2) = 3, \alpha \approx 71,6^\circ$$

2. Für $B(-1|0)$:

$$m = f'(-1) = -2, \alpha \approx 116,6^\circ$$

3. Schnittwinkel von t_A und t_B :

$$\beta \approx 45^\circ$$

Zusatzaufgabe:

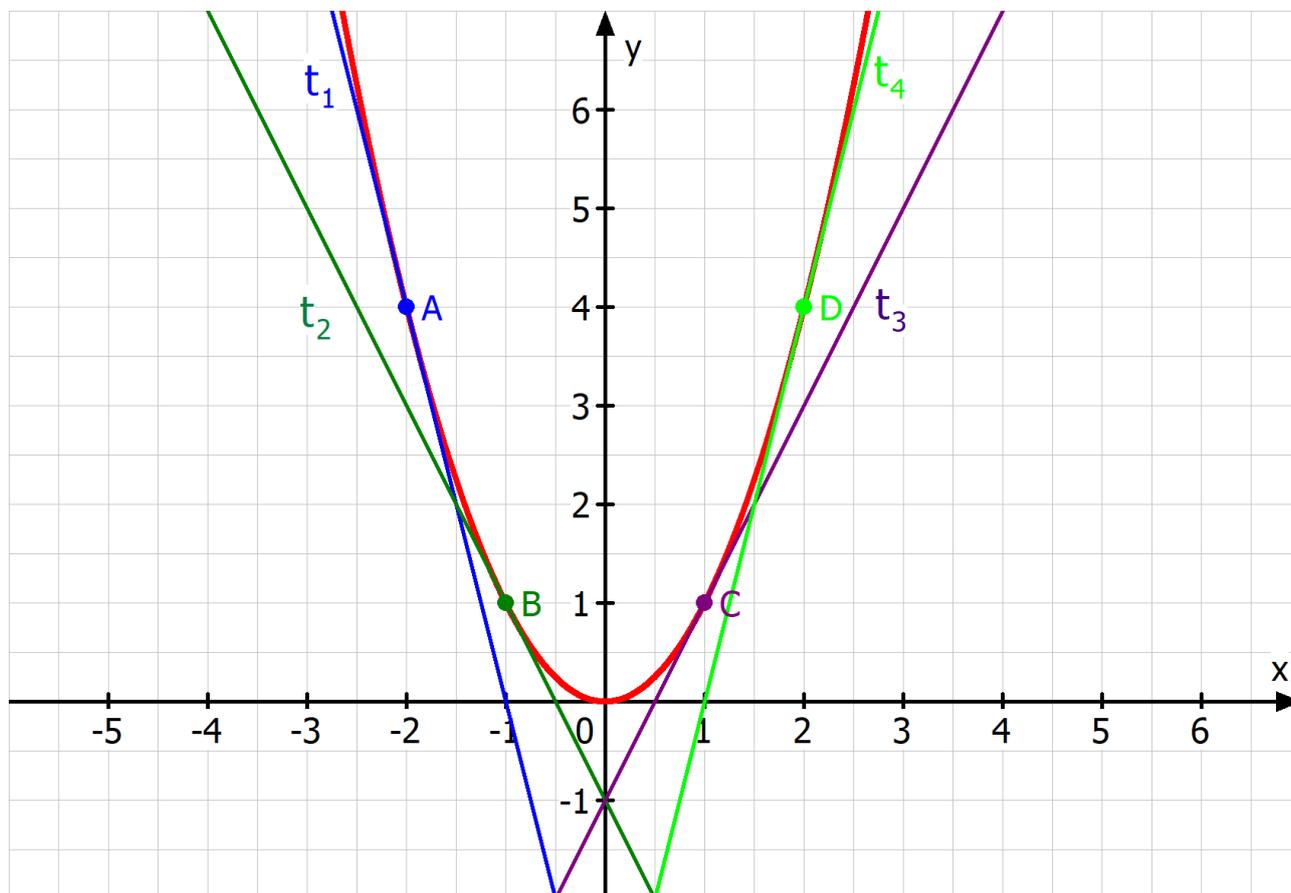
$$t_A = 3x + 6, t_B = -2x - 2$$

$$t_A = t_B, x = -\frac{8}{5} \text{ und } S\left(-\frac{8}{5} \mid \frac{6}{5}\right)$$

6. ANSTIEGSWERTE ALS FUNKTION (1)

Im folgenden Bild ist eine quadratische Funktion (rot) dargestellt.

An den Graphen werden in den Punkten A , B , C und D die Tangenten t_1 bis t_4 gelegt.



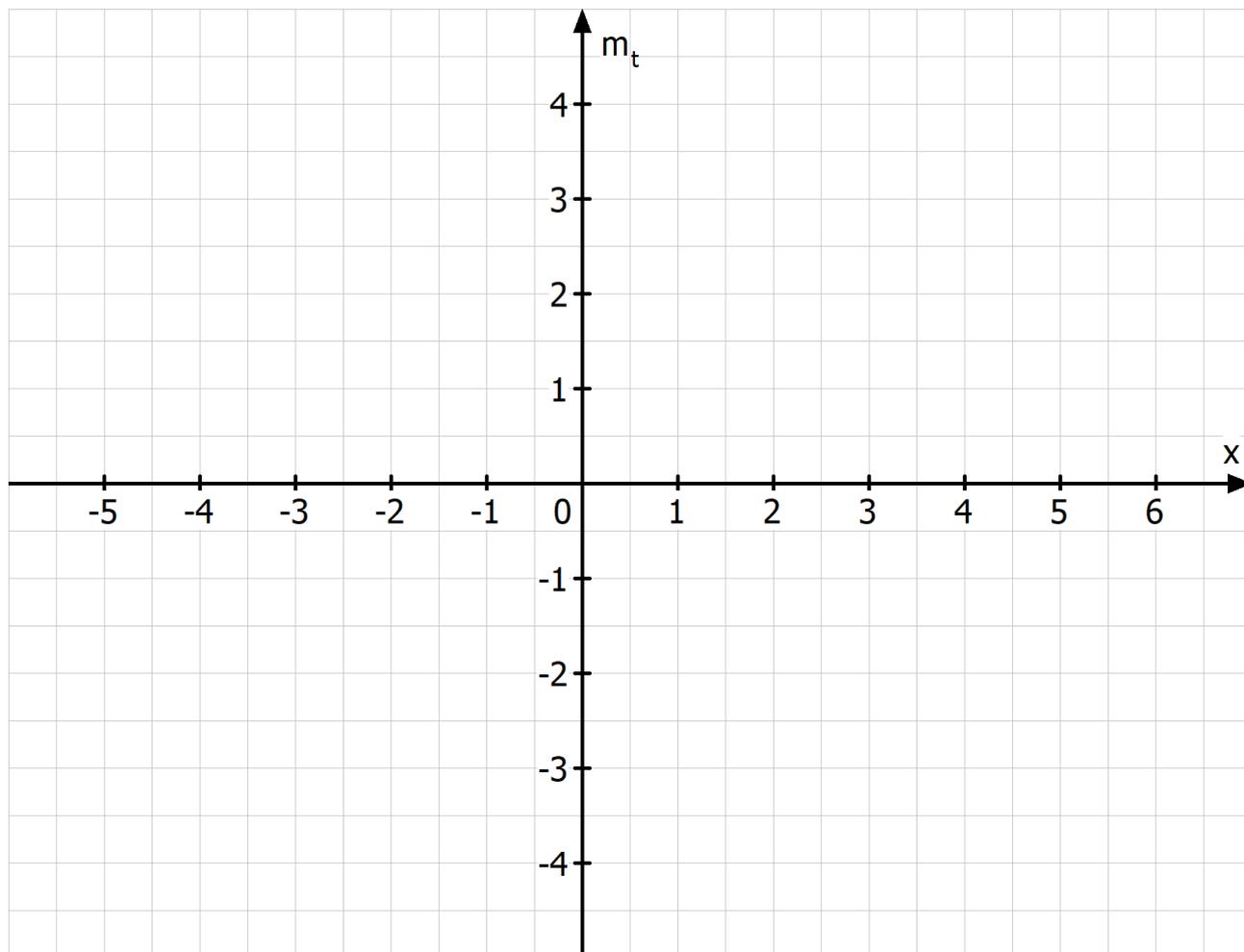
Bestimme in den Punkten A bis D die Anstiege der Tangenten t_1 bis t_4 ! Trage deine Ergebnisse in diese Tabelle ein!

Anstieg von t_1	Anstieg von t_2	Anstieg von t_3	Anstieg von t_4

Die x -Werte der Punkte A bis D und die zugehörigen Anstiege der Tangenten t_1 bis t_4 bilden jeweils ein Wertepaar. Trage die Wertepaare in diese Tabelle ein!

x-Wert des Punktes				
Anstieg der Tangente				

Betrachte die Wertepaare als Koordinaten der Punkte E bis H und trage sie in das folgende Koordinatensystem ein!



Alle Punkte liegen auf der Geraden g .

Zeichne die Gerade g ein und bestimme ihre Funktionsgleichung!

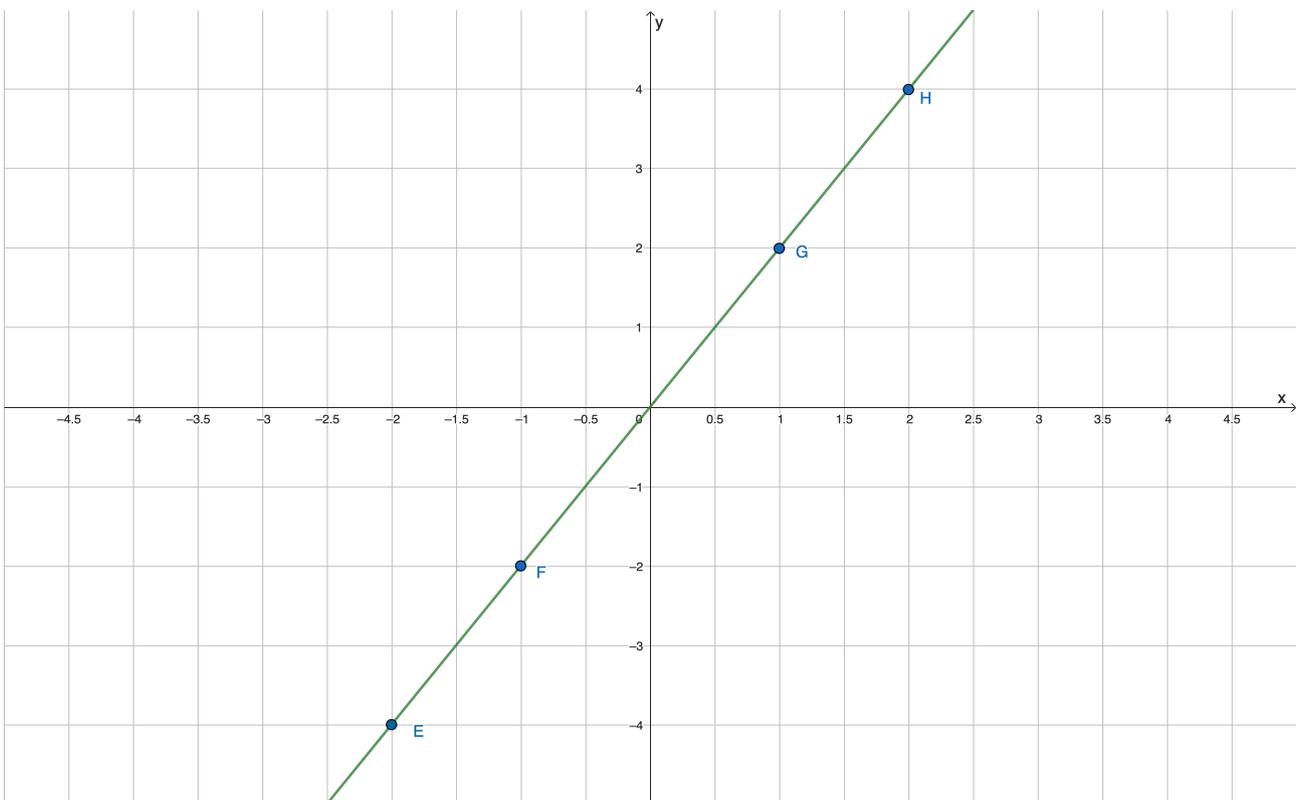
Löse graphisch mithilfe der obigen Zeichnung folgende Aufgaben:

- Bestimme den Anstieg des Graphen von $f(x) = x^2$ für $x = -1,5$!
- Bestimme die Koordinaten des Punktes P , in dem der Graph von $f(x) = x^2$ den Anstieg $m = 1$ hat!
- Auf dem Graphen von $f(x) = x^2$ liegt der Punkt $Q(x_Q < 0 \mid 2)$.
Bestimme x_Q und den Anstieg des Graphen von $f(x) = x^2$ im Punkt Q !

LÖSUNGEN

Anstieg von t_1	Anstieg von t_2	Anstieg von t_3	Anstieg von t_4
-4	-2	2	4

x-Wert des Punktes	-2	-1	1	2
Anstieg der Tangente	-4	-2	2	4



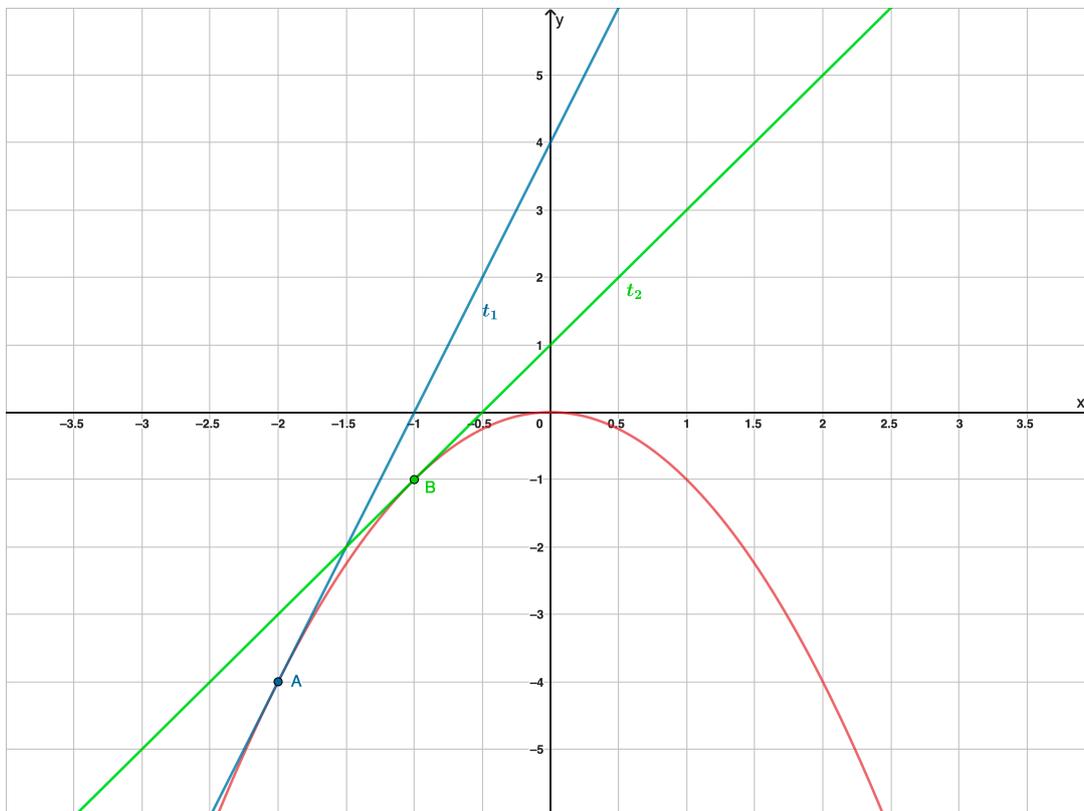
Alle Punkte liegen auf der Geraden $y = 2x$.

- a) -3
- b) $P(0,5 | 0,25)$
- c) $x_Q \approx 1,4, m \approx 2,8$

7. ANSTIEGSWERTE ALS FUNKTION (2)

Im folgenden Bild ist eine quadratische Funktion (rot) dargestellt.

An den Graphen werden in den Punkten A , B , $C(0,5 | y_C)$ und $D(1,5 | y_D)$ die Tangenten t_1 bis t_4 gelegt.



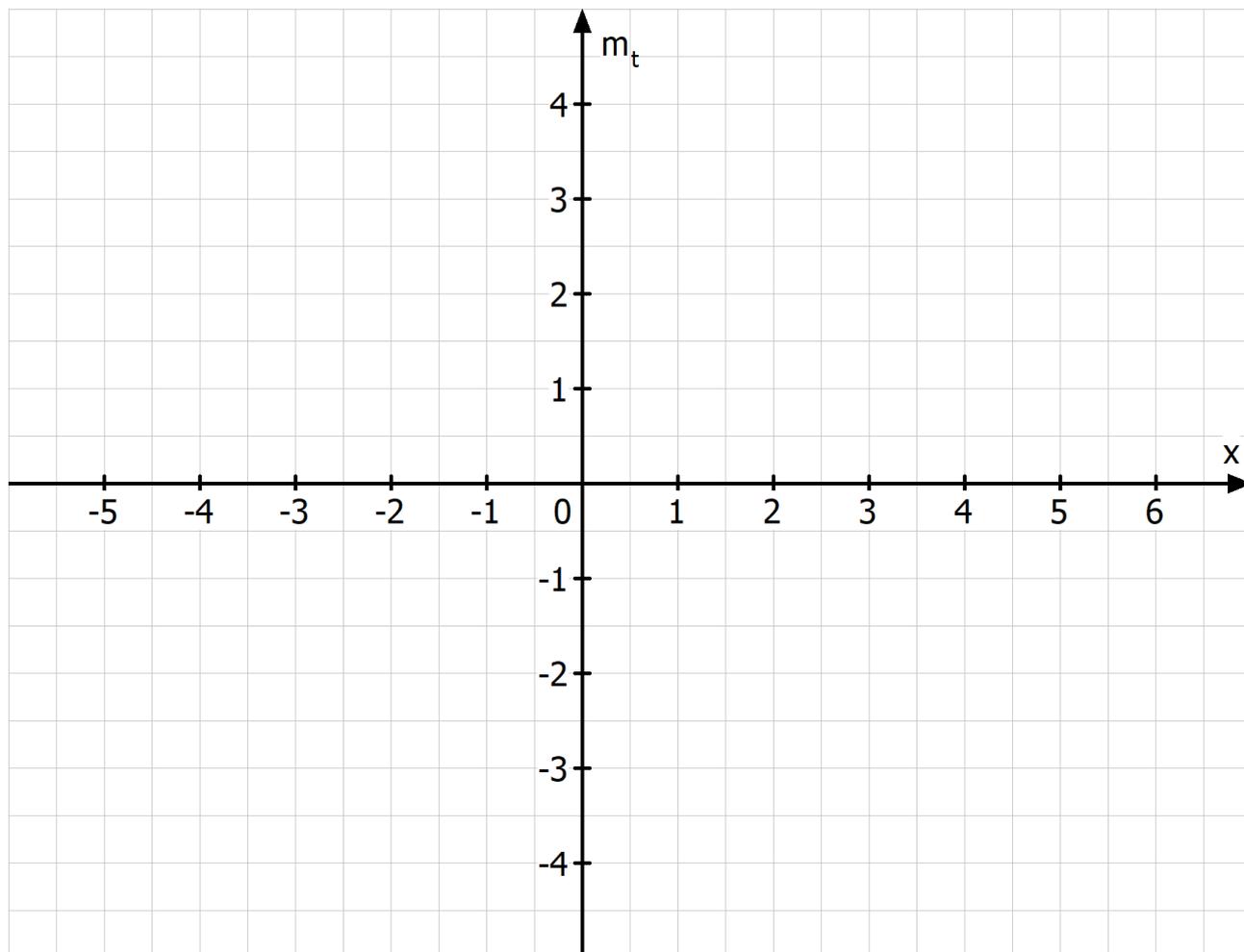
Bestimme in den Punkten A bis D die Anstiege der Tangenten t_1 bis t_4 ! Trage deine Ergebnisse in diese Tabelle ein!

Anstieg von t_1	Anstieg von t_2	Anstieg von t_3	Anstieg von t_4

Die x -Werte der Punkte A bis D und die zugehörigen Anstiege der Tangenten t_1 bis t_4 bilden jeweils ein Wertepaar. Trage die Wertepaare in diese Tabelle ein!

x-Wert des Punktes				
Anstieg der Tangente				

Betrachte die Wertepaare als Koordinaten der Punkte E bis H und trage sie in das folgende Koordinatensystem ein!



Alle Punkte liegen auf der Geraden g .

Zeichne die Gerade g ein und bestimme ihre Funktionsgleichung!

Löse graphisch mithilfe der obigen Zeichnung folgende Aufgaben:

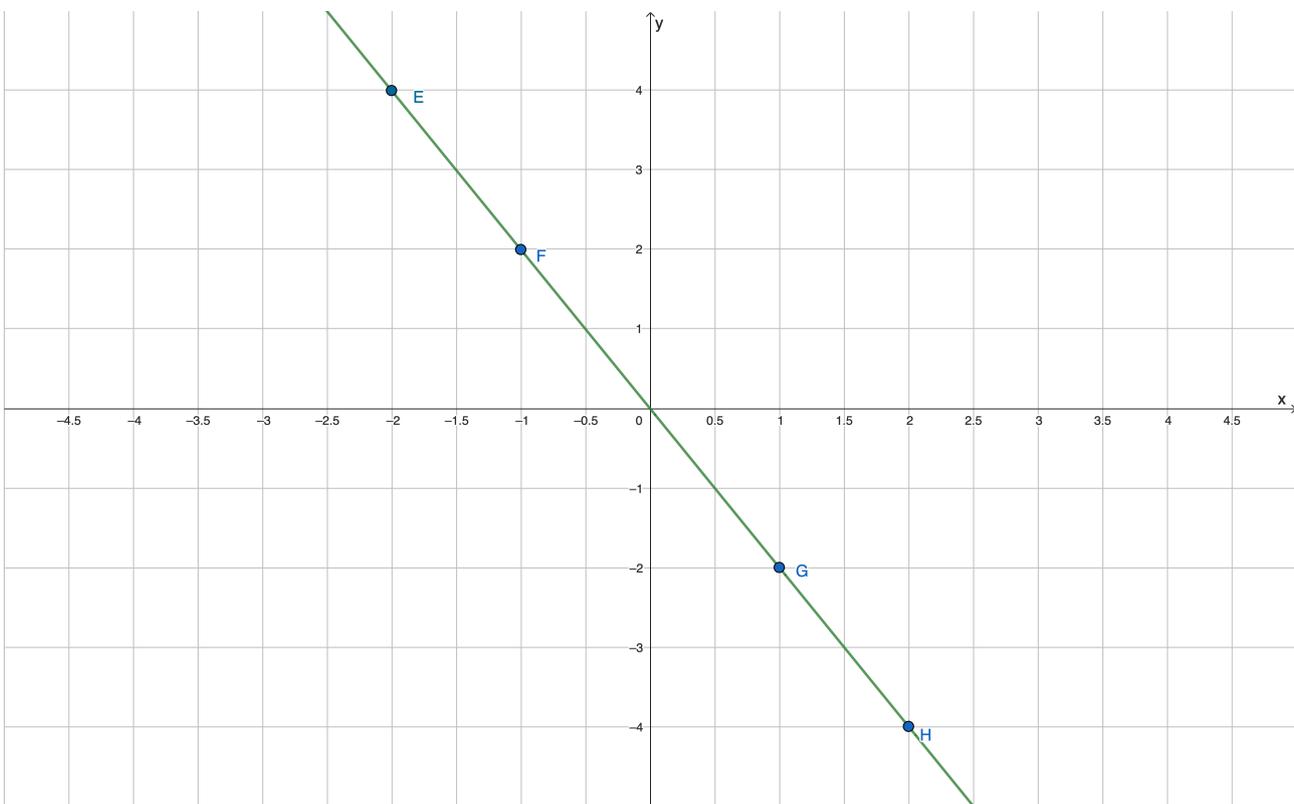
- Bestimme den Anstieg des Graphen von $f(x) = -x^2$ für $x = -1,5$!
- Bestimme die Koordinaten des Punktes P , in dem der Graph von $f(x) = x^2$ den Anstieg $m = 1$ hat!
- Auf dem Graphen von $f(x) = -x^2$ liegt der Punkt $Q(x_Q > 0 | 2)$.
Bestimme x_Q und den Anstieg des Graphen von $f(x) = -x^2$ im Punkt Q !

LÖSUNGEN

Punkt $C(0,5 | -0,25)$, Punkt $D(1,5 | -2,25)$

Anstieg von t_1	Anstieg von t_2	Anstieg von t_3	Anstieg von t_4
4	2	-1	-3

x-Wert des Punktes	-2	-1	0,5	1,5
Anstieg der Tangente	4	2	-1	-3



Alle Punkte liegen auf der Geraden $y = -2x$.

a) 3

b) $P(-0,5 | 0,25)$

c) $x_Q \approx 1,4$, $m \approx -2,8$

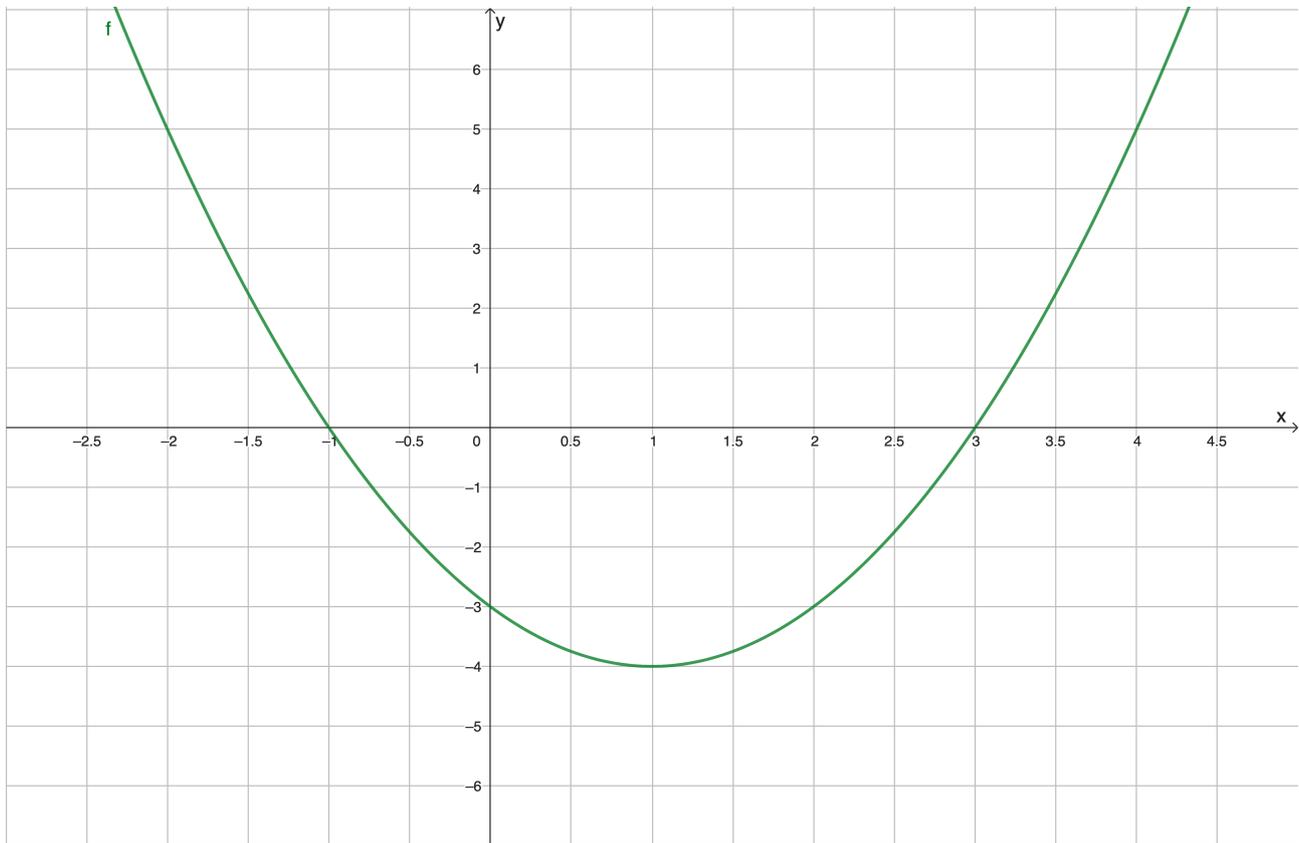
Name: _____ Datum: _____

8. ANSTIEGSWERTE ALS FUNKTION (3)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f .

Bestimme die Anstiege des Graphen von f für $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$!

Zeichne in diese Abbildung den Graphen der Anstiegswertfunktion ein und bestimme seine Gleichung!



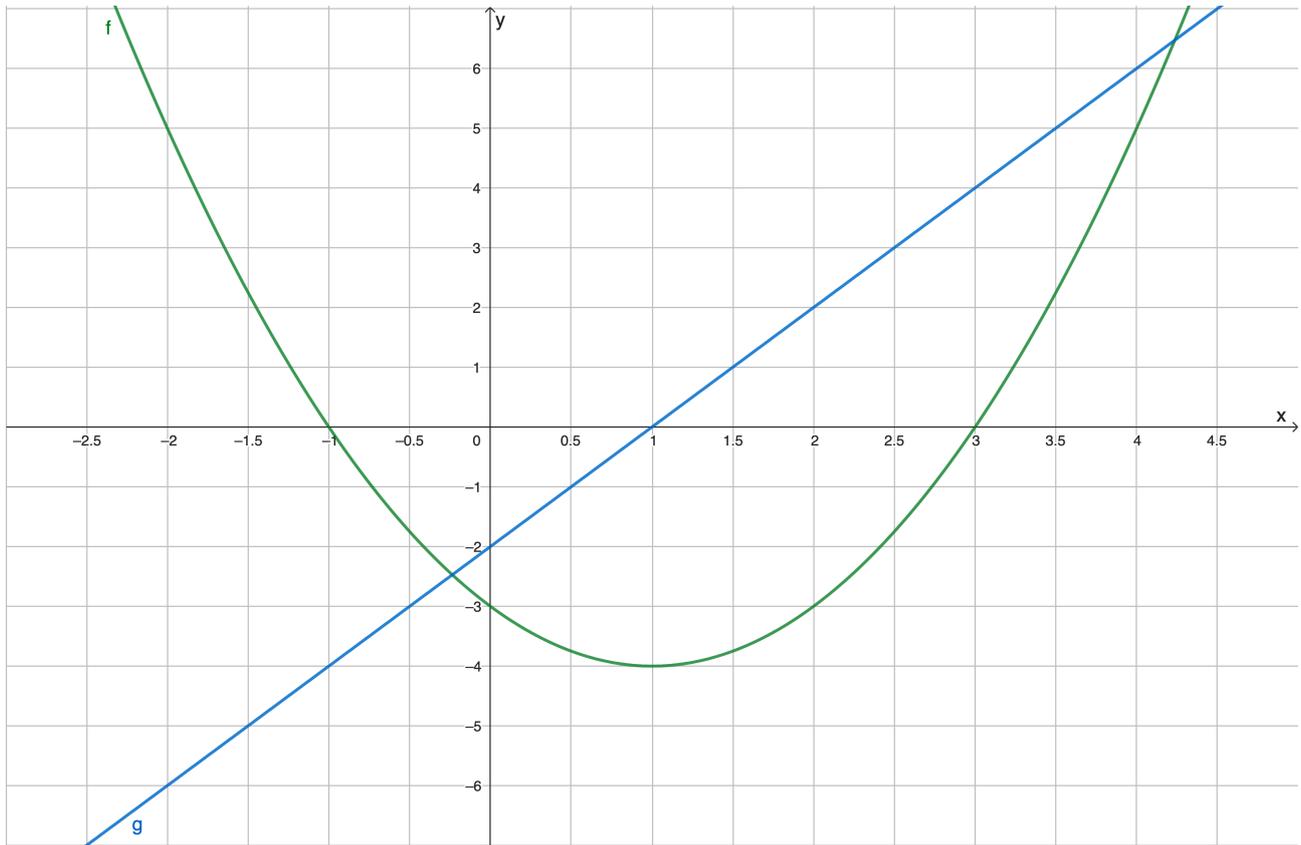
Anstiegswerte des Graphen von f :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

LÖSUNGEN

Anstiegswerte des Graphen von f:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-4	-2	0	2	4

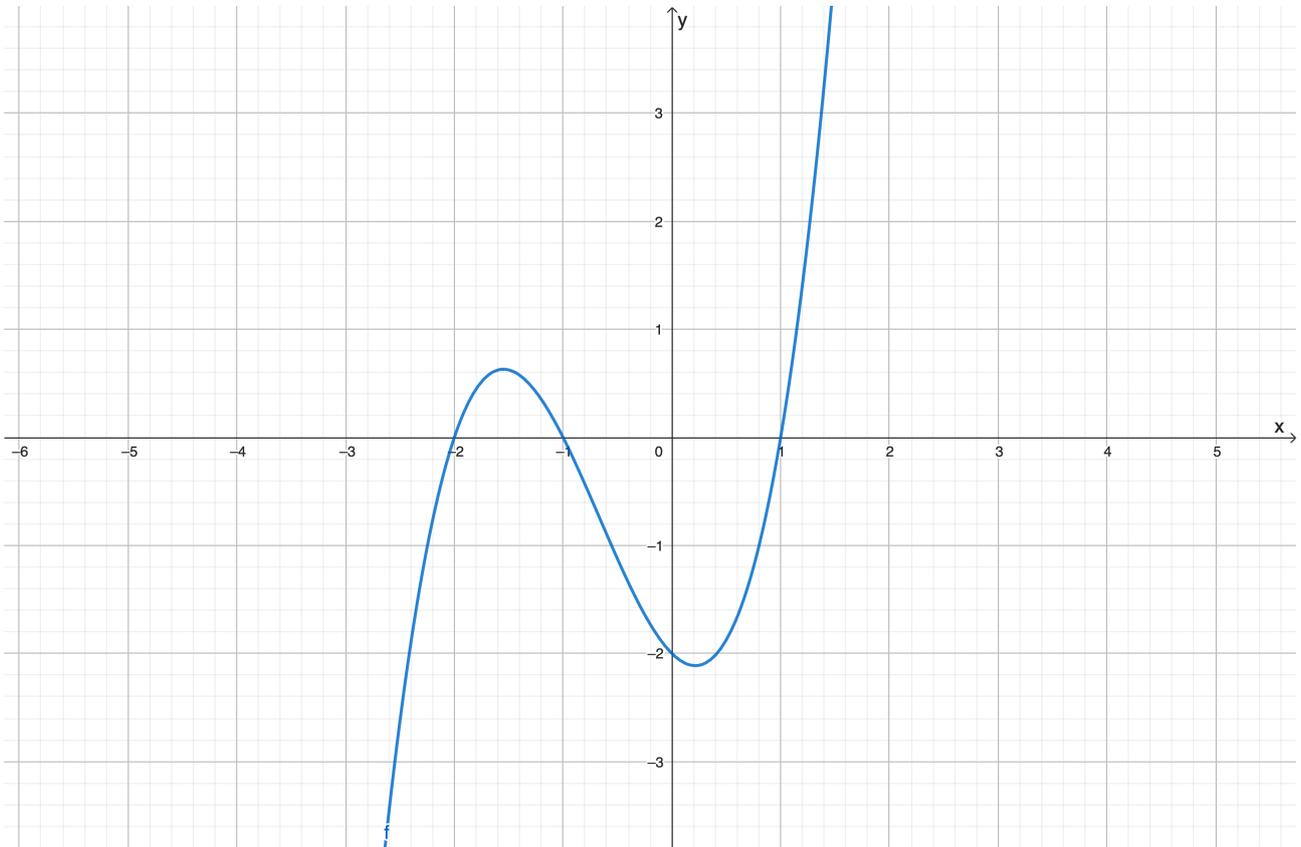


Die Gleichung der Anstiegswerte lautet $y = 2x - 2$.

Name: _____ Datum: _____

9. ANSTIEGSWERTE ALS FUNKTION (4)

Gegeben ist der Graph einer Funktion f .



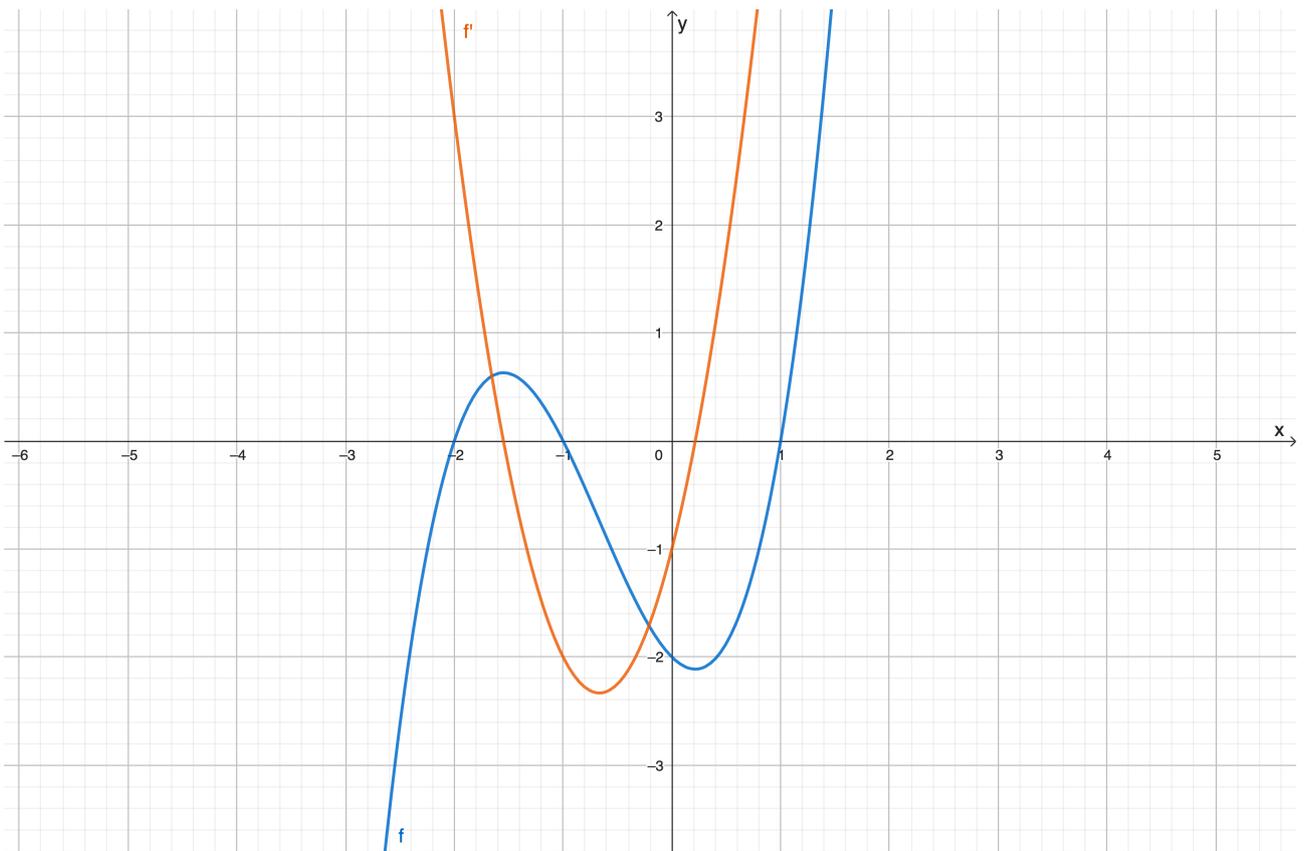
Bestimme in den folgenden 6 Stellen des Graphen seine Anstiegswerte!

Trage deine Ergebnisse hier ein:

$x_1 = -2$	$x_2 = -1,56$	$x_3 = -1$	$x_4 = -0,5$	$x_5 = 0,22$	$x_6 = 0,6$

Zeichne die zugehörige Funktion der Anstiegswerte in die obige Abbildung ein!

LÖSUNGEN

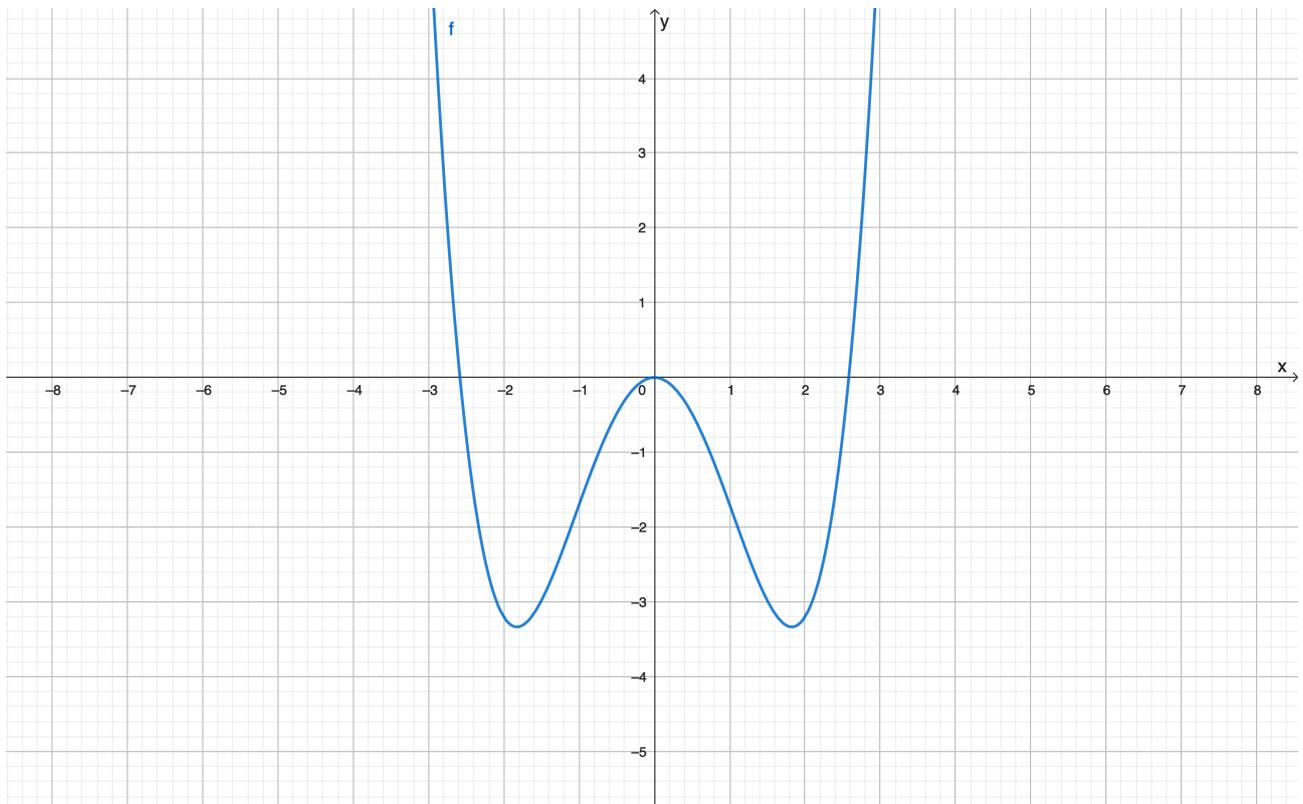


$x_1 = -2$	$x_2 = -1,56$	$x_3 = -1$	$x_4 = -0,5$	$x_5 = 0,22$	$x_6 = 0,6$
3	0	-2	-2,25	0	2,48

Name: _____ Datum: _____

10. ANSTIEGSWERTE ALS FUNKTION (5)

Gegeben ist der Graph einer Funktion f .



Bestimme in den folgenden 6 Stellen des Graphen seine Anstiegswerte!
Nutze dazu die Symmetrie des Graphen aus!

Trage deine Ergebnisse hier ein:

Zeichne die zugehörige Funktion der Anstiegswerte in die obige Abbildung ein!

LÖSUNGEN

