

TÄGLICHE ÜBUNGEN

INTEGRALRECHNUNG

Die sogenannten „Täglichen Übungen“ sollten grundlegender Bestandteil des Mathematikunterrichts sein.

Die ersten vier Aufgaben sind elementar und einfach gehalten.

Die Aufgaben 5 bis 8 können als vertiefend und die beiden letzten Aufgaben als schwer betrachtet werden.

Alle 10 Aufgaben innerhalb einer Übung lösen zu lassen, dürfte für die meisten Schüler eine Überforderung sein.

Anzustreben ist, dass alle Schüler die Aufgaben 5 bis 8 bearbeiten.

Die Verwendung von Hilfsmitteln muss situativ entschieden werden.

Grundsätzlich sind alle Aufgaben nur durch Kopfrechnen lösbar.

Auf der Seite 2 sind die Lösungen angegeben.

Grundlage dieser Übungsvorschläge ist die Arbeit von Heike Krüger und ihrem Betreuer Dr. Eugen Reibis von der Pädagogischen Hochschule Potsdam, jetzt Universität Potsdam, veröffentlicht in Heftform im Jahr 1982.

Diese Materialien dürfen beliebig, außer zu kommerziellen Zwecken, verwendet, auch verändert und weitergegeben werden.

Ralf Benzmann

2024

Inhaltsverzeichnis

1. Stammfunktionen von Potenzfunktionen (Übung 1 von 2)	4
2. Stammfunktionen von Potenzfunktionen (Übung 2 von 2)	6
3. Stammfunktionen und erste Ableitung	8
4. Stammfunktionen von Potenzfunktionen mit Bedingungen	10
5. Stammfunktionen von Funktionen mit rationalen Exponenten	12
6. Unbestimmte Integrale von Wurzelfunktionen	14
7. Unbestimmte Integrale von Exponentialfunktionen	16
8. Unbestimmte Integrale von Logarithmusfunktionen	18
9. Unbestimmte Integrale von Produkten (Partielle Integration)	20
10. Integration durch Substitution	22

Name: _____ Datum: _____

1. STAMMFUNKTIONEN VON POTENZFUNKTIONEN (ÜBUNG 1 VON 2)

Nr.	gegeben	Eine Stammfunktion F(x) von f(x)
1.	$f(x) = 3$	
2.	$f(x) = x$	
3.	$f(x) = 3x$	
4.	$f(x) = x - 5$	
5.	$f(x) = 2x + 7$	
6.	$f(x) = \frac{1}{2}x + 9$	
7.	$f(x) = \frac{3}{4}x^2$	
8.	$f(x) = -3x^2 + 4x - 2$	

Anleitung:

$f(x) = \frac{3}{5}x^2 - 6x$, dann ist eine Stammfunktion $F(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c$ und nach dem Kürzen $F(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + c$.

LÖSUNGEN

1.	$F(x) = 3x$
2.	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
3.	$F(x) = \frac{3}{2}x^2$
4.	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$
5.	$F(x) = x^2 + 7x$
6.	$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 9x$
7.	$F(x) = \frac{1}{4}x^3$
8.	$F(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x$

Name: _____ Datum: _____

2. STAMMFUNKTIONEN VON POTENZFUNKTIONEN (ÜBUNG 2 VON 2)

Nr.	gegeben	Eine Stammfunktion F(x) von f(x)
1.	$f(x) = -1,5x$	
2.	$f(x) = 0,75x$	
3.	$f(x) = x^5$	
4.	$f(x) = -1,5x^6$	
5.	$f(x) = -\frac{9}{4}x^8$	
6.	$f(x) = \frac{15}{8}x^4 + 7x^3$	
7.	$f(x) = \frac{12}{25}x^5 - 5x^4$	
8.	$f(x) = -\frac{2}{7}x^7 - \frac{7}{3}x^6$	

LÖSUNGEN

1.	$F(x) = -0,75x^2$
2.	$F(x) = 0,375x^2 = \frac{3}{8}x^2$
3.	$F(x) = \frac{1}{6}x^6$
4.	$F(x) = -\frac{3}{14}x^7$
5.	$F(x) = -\frac{1}{4}x^9$
6.	$F(x) = \frac{3}{8}x^5 + \frac{7}{4}x^4$
7.	$F(x) = \frac{2}{25}x^6 - x^5$
8.	$F(x) = -\frac{1}{28}x^8 - \frac{1}{3}x^7$

Name: _____ Datum: _____

3. STAMMFUNKTIONEN UND ERSTE ABLEITUNG

Nr.	gegeben	gesucht	Ergebnis
1.	$f(x) = 5x^4$	$f'(x)$	
2.	$f(x) = 5x^4$	$F(x)$	
3.	$f(x) = x^4 - x^3$	$f'(x)$	
4.	$f(x) = x^4 - x^3$	$F(x)$	
5.	$f(x) = \frac{5}{7}x^4 - 4x^3 - 2x - 5$	$f'(x)$	
6.	$f(x) = \frac{5}{7}x^4 - 4x^3 - 2x - 5$	$F(x)$	
7.	$f(x) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + 5x^3 - 12$	$f'(x)$	
8.	$f(x) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + 5x^3 - 12$	$F(x)$	

LÖSUNGEN

1.	$f'(x) = 20x^3$
2.	$F(x) = x^5$
3.	$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
4.	$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$
5.	$f'(x) = \frac{20}{7}x^3 - 12x^2 - 2$
6.	$F(x) = \frac{1}{7}x^5 - x^4 - x^2 - 5x$
7.	$f'(x) = \frac{25}{4}x^4 - \frac{12}{5}x^3 + 15x^2$
8.	$F(x) = -\frac{5}{24}x^6 - \frac{3}{25}x^2 + \frac{5}{4}x^4 - 12x$

Name: _____ Datum: _____

4. STAMMFUNKTIONEN VON POTENZFUNKTIONEN MIT BEDINGUNGEN

Nr.	gegeben	Ergebnis
1.	$f(x) = x, f(1) = 0,5$	
2.	$f(x) = x + 1, F(0) = 1$	
3.	$f(x) = x^2, F(0) = 5$	
4.	$f(x) = 2x - 3, F(0) = -4$	
5.	$f(x) = \frac{5}{2}x^4 + x, F(1) = 2$	
6.	$f(x) = 3x^2 - 6x - 1, F(2) = -3$	
7.	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 5, F(2) = 0$	

Anleitung:

$f(x) = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{35}{2}x + 33, F(1) = -15$. Zunächst bilden wir die Menge aller

Stammfunktionen mit der Variablen c : $F(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{35}{4}x^2 + 33x + c$. Für x setzen wir 1 ein

und für $F(x)$ den Wert -15 : $-15 = \frac{3}{4}1^3 - \frac{35}{4}1^2 + 33 \cdot 1 + c$. Das ergibt $c = 40$.

LÖSUNGEN

1.	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
2.	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
3.	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$
4.	$F(x) = x^2 - 3x - 4$
5.	$F(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 1$
6.	$F(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
7.	$F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 12$

Name: _____ Datum: _____

5. STAMMFUNKTIONEN VON FUNKTIONEN MIT RATIONALEN EXPONENTEN

Nr.	gegeben	eine Stammfunktion F(x) von f(x)
1.	$f(x) = x^{-2}$	
2.	$f(x) = -2x^{-2}$	
3.	$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	
4.	$f(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$	
5.	$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + \frac{7}{4}x^2$	
6.	$f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + x^4$	
7.	$f(x) = \frac{3}{2}x^{-7} + \frac{4}{3}x$	
8.	$f(x) = -\frac{10}{7}x^{-6} - \frac{8}{5}x^{-3}$	

Anleitung:

$$f(x) = \frac{5}{4}x^{-6} + x^{\frac{3}{4}}. \text{ Dann ist } F(x) = \frac{5}{4} \cdot -\frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{7}{4}} = -\frac{1}{4}x^{-5} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}, \text{ denn}$$

$$-6 + 1 = -5 \text{ und } \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}.$$

LÖSUNGEN

1.	$F(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
2.	$F(x) = 2x^{-1} = \frac{2}{x}$
3.	$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
4.	$F(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$
5.	$F(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + \frac{7}{12}x^3$
6.	$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^{-1}$
7.	$F(x) = -\frac{1}{4}x^{-6} + \frac{2}{3}x^2$
8.	$F(x) = \frac{2}{7}x^{-5} + \frac{4}{5}x^{-2}$

Name: _____ Datum: _____

6. UNBESTIMMTE INTEGRALE VON WURZELFUNKTIONEN

Nr.	gegeben	Ergebnis
1.	$\int \sqrt{x} \, dx$	
2.	$\int \frac{3}{2} \sqrt{x} \, dx$	
3.	$\int -2\sqrt{x} \, dx$	
4.	$\int -\frac{2}{\sqrt{x}} \, dx$	
5.	$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \, dx$	

Anleitung:

Beachte $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$.

LÖSUNGEN

1.	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
2.	$x^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{x^3} + c$
3.	$-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c$
4.	$-4\sqrt{x} + c$
5.	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$

Name: _____ Datum: _____

7. UNBESTIMMTE INTEGRALE VON EXPONENTIALFUNKTIONEN

Nr.	gegeben	Ergebnis
1.	$\int e^x dx$	
2.	$\int -e^x dx$	
3.	$\int -2e^{-x} dx$	
4.	$\int 4e^{-5x} dx$	
5.	$\int (3e^{4x} - 9e^{3x}) dx$	
6.	$\int \left(-3e^{6x} + \frac{3}{2}e^{-9x}\right) dx$	
7.	$\int \left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{11}{12}e^{\frac{6}{7}x}\right) dx$	
8.	$\int \left(12e^{0,5x} - \frac{2}{3}x^6\right) dx$	

Anleitung:

$$\int 12e^{3x} - \frac{2}{3}e^{6x} dx = 12 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}e^{6x} + c = 4e^{3x} - \frac{1}{9}e^{6x} + c.$$

LÖSUNGEN

1.	$e^x + c$
2.	$-e^x + c$
3.	$2e^{-x} + c$
4.	$-\frac{4}{5}e^{-5x} + c$
5.	$\frac{3}{4}e^{4x} - 3e^{3x} + c$
6.	$-\frac{1}{2}e^{6x} - \frac{1}{6}e^{-9x} + c$
7.	$\frac{8}{15}e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{77}{72}e^{\frac{6}{7}x}$
8.	$24e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{21}x^7 + c$

Name: _____ Datum: _____

8. UNBESTIMMTE INTEGRALE VON LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Nr.	gegeben	Ergebnis
1.	$\int \ln(x) dx$	
2.	$\int (\ln(x) + 1) dx$	
3.	$\int (-\ln(x) + x) dx$	
4.	$\int 2 \ln(-x) \cdot dx$	
5.	$\int \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$	
6.	$\int \ln(x^2) dx$	
7.	$\int 2 \cdot \ln(x^2) dx$	
8.	$\int \ln(2x^2) dx$	

Anleitung:

$$\begin{aligned} \int \ln(3x^4) dx &= \int (\ln(3) + \ln(x^4)) dx = \int (\ln(3) + 4 \ln(x)) dx = \ln(3) \cdot x + 4 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + c \\ &= \ln(3) \cdot x + 4x \cdot \ln(x) - 4x + c = \ln(3) \cdot x + x \cdot \ln(x^4) - 4x + c = x \cdot \ln(x^4) + (\ln(3) - 4) \cdot x + c \end{aligned}$$

LÖSUNGEN

1.	$x \cdot \ln(x) - x + c$
2.	$x \cdot \ln(x) + c$
3.	$-x \cdot \ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2$
4.	$2x \cdot \ln(-x) - 2x + c$
5.	$x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x = -x \cdot \ln(x) + x$
6.	$x \cdot \ln(x^2) - 2x = 2x \cdot \ln(x) - 2x$
7.	$2 \cdot (x \cdot \ln(x^2) - 2x) = 2x \cdot \ln(x) - 4x$
8.	$x \cdot \ln(2x^2) - 2x$

Name: _____ Datum: _____

9. UNBESTIMMTE INTEGRALE VON PRODUKTEN (PARTIELLE INTEGRATION)

Nr.	gegeben	Ergebnis
1.	$\int x \cdot e^x dx$	
2.	$\int -x \cdot e^x dx$	
3.	$\int -2x \cdot e^{-x} dx$	
4.	$\int 4x \cdot e^{-5x} dx$	
5.	$\int -3x e^{-4x} dx$	
6.	$\int (-a^2x \cdot e^{ax}) dx$	

Anleitung

$$\begin{aligned} \int 3x \cdot e^{-2x} dx &= 3x \cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} - \int \left(-\frac{3}{2}e^{-2x}\right) dx = -\frac{3}{2}x \cdot e^{-2x} + \frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} + c \\ &= -\frac{3}{2}x \cdot e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + c = -\frac{3}{4}e^{-2x} \cdot (2x + 1) + c \end{aligned}$$

LÖSUNGEN

1.	$x \cdot e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c$
2.	$-x \cdot e^x + e^x + c = -(x - 1) e^x + c$
3.	$2x \cdot e^{-x} + 2e^{-x} + c = 2(x + 1) e^{-x} + c$
4.	$-\frac{4}{5}x \cdot e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + c = \left(-\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}\right) e^{-5x} + c$
5.	$\frac{3}{16}(4x + 1) e^{-4x} + c$
6.	$(1 - ax) e^{ax} + c$

10. INTEGRATION DURCH SUBSTITUTION

Nr.	gegeben	Substitution	Ergebnis
1.	$\int e^{-2x} dx$	$-2x = z$	
2.	$\int \frac{8}{e^{4x-3}} dx$	$3 - 4x = z$	
3.	$\int \frac{e^{3x-4}}{e^{x+2}} dx$	$2x - 6 = z$	
4.	$\int \frac{x \cdot e^{x^2-x}}{e^{1-x}} dx$		
5.	$\int e^{ax+b} dx$		
6.	$\int \frac{a \cdot e^{-bx}}{b \cdot e^{x+a}} dx$		

Anleitung

$$\int \frac{3 \cdot e^{-2x}}{2 \cdot e^{x+3}} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{e^{-2x}}{e^{x+3}} dx = \frac{3}{2} \cdot \int e^{-2x-(x+3)} dx = \frac{3}{2} \cdot \int e^{-3x-3} dx$$

$$-3x - 3 = z, \frac{dz}{dx} = -3, dx = -\frac{1}{3} dz, \frac{3}{2} \cdot \int -\frac{1}{3} e^z dz = -\frac{1}{2} e^{-3x-3} + c$$

LÖSUNGEN

1.	$-\frac{1}{2} e^{-2x} + c$
2.	$-2 e^{3-4x} + c$
3.	$\frac{1}{2} e^{-2x+6} + c$
4.	$x^2 - 1 = z, \frac{1}{2} e^{x^2-1} + c$
5.	$ax + b = z, \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
6.	$-(b+1)x - a = z, -\frac{a}{b(b+1)} \cdot e^{-(b+1)x-a} + c$