

TÄGLICHE ÜBUNGEN

ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die sogenannten „Täglichen Übungen“ sollten grundlegender Bestandteil des Mathematikunterrichts sein.

Diese Vorübungen dienen der Entwicklung der zeichnerischen Fähigkeiten und des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Diese Materialien dürfen beliebig, außer zu kommerziellen Zwecken, verwendet, auch verändert und weitergegeben werden.

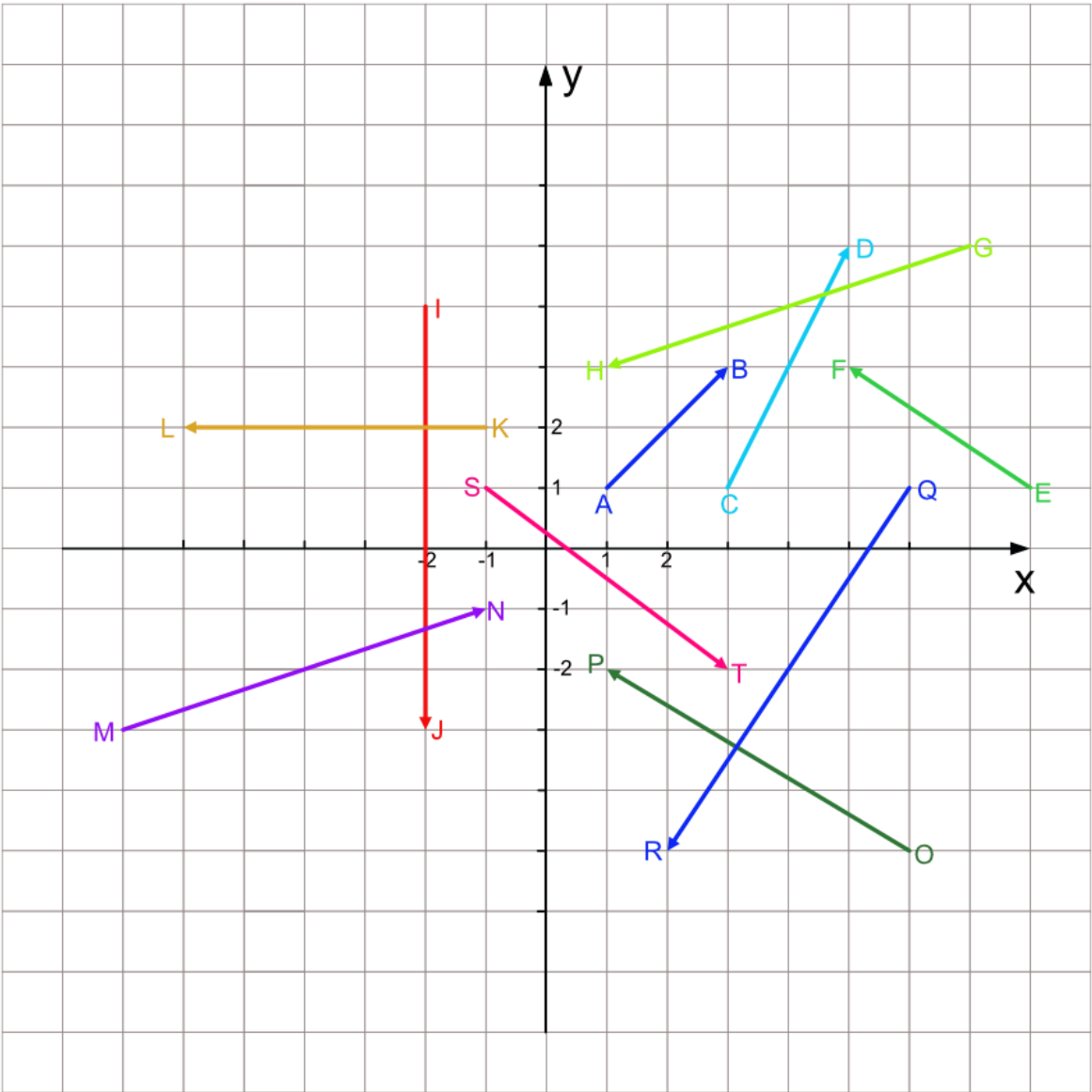
Ralf Benzmann

2024

Inhaltsverzeichnis

1. Vektoren in der Ebene aufstellen	4
2. Vektoren im Raum aufstellen	6
3. Betrag eines Vektors	8
4. Einheitsvektor und Entfernungen	10
5. Rechnen mit Vektoren	12
6. Lineare Abhängigkeit von Vektoren	14
7. Geradengleichungen aufstellen	16
8. Punktprobe (Gerade, Strahl, Strecke)	18
9. Skalarprodukt mit Betrag und Winkel	20
10. Skalarprodukt mit Koordinaten	22
11. Mit dem Skalarprodukt Winkel berechnen	24
12. Das Vektorprodukt berechnen	26
13. Das Spatprodukt berechnen	28
14. Abstände (Punkt-Punkt, Punkt-Gerade) berechnen	30
15. Abstände (Punkt-Ebene, Gerade-Gerade) berechnen	32
16. Abstände (Gerade-Ebene, Ebene-Ebene) berechnen	34
17. Kreisgleichungen	36
18. Kreis und Punkt	38
19. Kreistangente	40
20. Kreis und Gerade	42
21. Zwei Kreise	44
22. Kugelgleichungen	46
23. Kugel und Punkt	48
24. Kugel und Gerade	50

1. VEKTOREN IN DER EBENE AUFSTELLEN

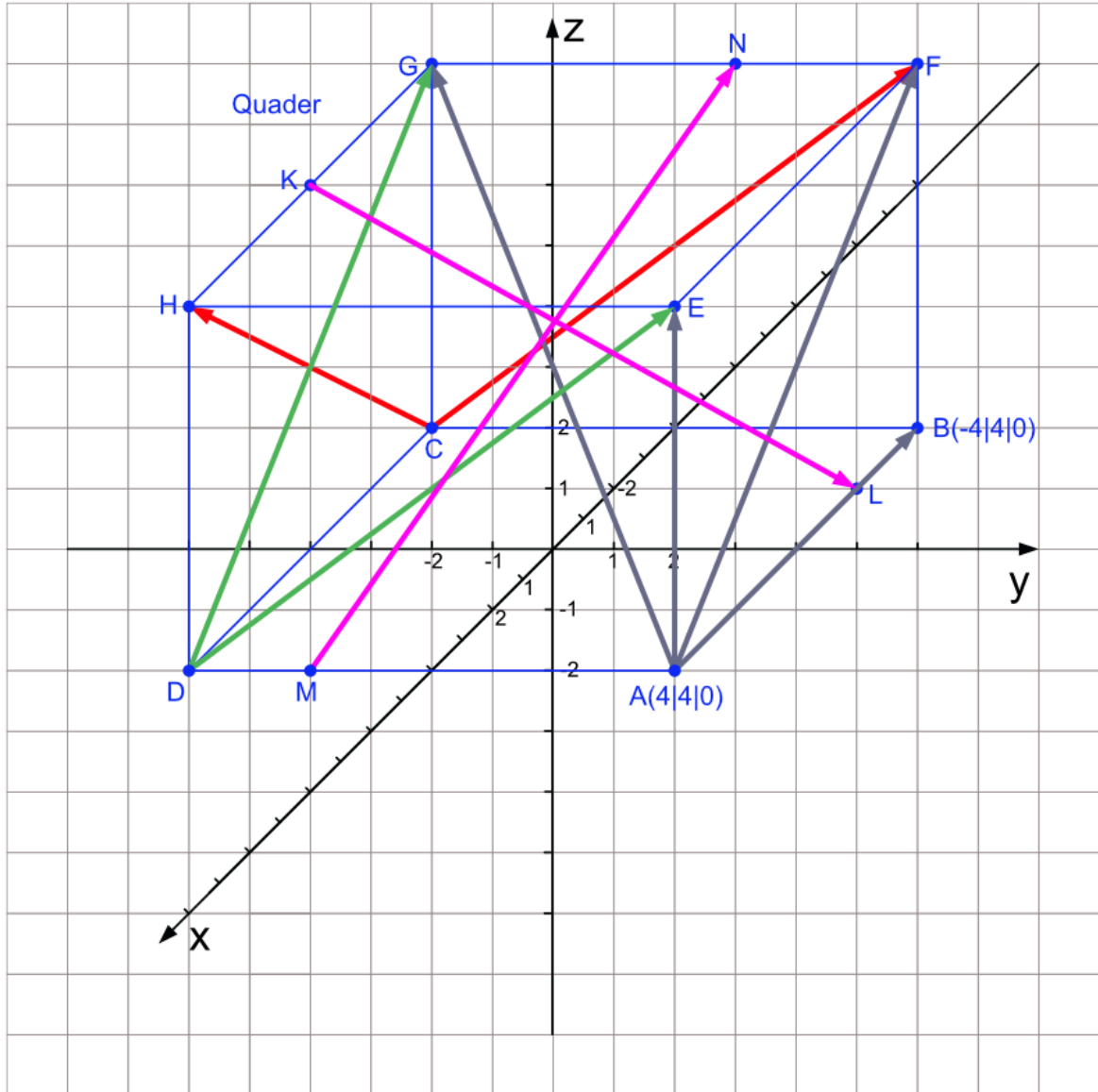


LÖSUNGEN

1.	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2.	$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.	$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
4.	$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$
5.	$\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$
6.	$\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$
7.	$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
8.	$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$
9.	$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$
10.	$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Datum: _____

2. VEKTOREN IM RAUM AUFSTELLEN



LÖSUNGEN

1.	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2.	$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
3.	$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
4.	$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$
5.	$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$
6.	$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
7.	$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$
8.	$\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
9.	$\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$
10.	$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Name: _____ Datum: _____

3. BETRAG EINES VEKTORS

Nr.	Gegeben	Gesucht	Ergebnis
1.	$A(0 0 0),$ $B(0 0 3)$	$ \overrightarrow{AB} $	
2.	$C(1 5 2),$ $D(2 7 4)$	$ \overrightarrow{CD} $	
3.	$E(3 2 7),$ $F(7 4 11)$	$ \overrightarrow{EF} $	
4.	$G(10 21 9),$ $H(14 24 9)$	$ \overrightarrow{GH} $	
5.	$I(1 1 1),$ $J(-5 3 -4)$	$ \overrightarrow{IJ} $	
6.	$K(1 -1 3),$ $L(-2 -6 8)$	$ \overrightarrow{KL} $	
7.	$M(-2 -3 -4),$ $N(-5 -6 -7)$	$ \overrightarrow{MN} $	
8.	$O\left(\frac{1}{2} \left \frac{3}{4} \right \frac{3}{2}\right),$ $P\left(\frac{3}{4} \left \frac{1}{2} \right \frac{5}{2}\right)$	$ \overrightarrow{OP} $	
9.	$Q(a b^2 0,5a),$ $R(a+2 b^2 2a)$	$ \overrightarrow{QR} $	
10.	$S(k k^2 2k),$ $T(k+4 2k^2 k+3)$	$ \overrightarrow{ST} $	

LÖSUNGEN

1.	$ \overrightarrow{AB} = 3$
2.	$ \overrightarrow{CD} = 3$
3.	$ \overrightarrow{EF} = 6$
4.	$ \overrightarrow{GH} = 5$
5.	$ \overrightarrow{IJ} = \sqrt{65}$
6.	$ \overrightarrow{KL} = \sqrt{59}$
7.	$ \overrightarrow{MN} = 3\sqrt{3}$
8.	$ \overrightarrow{OP} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$
9.	$ \overrightarrow{QR} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}a^2}$
10.	$ \overrightarrow{ST} = \sqrt{k^4 + k^2 - 6k + 25}$

Name: _____ Datum: _____

4. EINHEITSVEKTOR UND ENTFERNUNGEN

Nr.	gegeben	Ergebnis
Bestimme den zugehörigen Einheitsvektor!		
1.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	
2.	$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	
3.	$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	
4.	$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	
Gegeben sind die Punkte $P(-2 4 -3)$ und $Q(0 6 -2)$.		
5.	Stelle die Geradengleichung der Geraden g durch P und Q auf (Parameter r)! Verwende als Richtungsvektor den zugehörigen Einheitsvektor!	
	Bestimme die Koordinaten aller Punkte S , die von P den angegebenen Abstand s haben!	
6.	$s_1 = 3$	
7.	$s_2 = 4$	
8.	$s_3 = 6$	
	Berechne den Einheitsvektor!	
9.	$\vec{e} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$	
10.	$\vec{f} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$	

LÖSUNGEN

1.	$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
2.	$\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3.	$\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
4.	$\vec{d}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$
5.	$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
6.	$S_1(0 6 -2)$ und $S_2(-4 2 -4)$
7.	$S_3\left(\frac{2}{3} \mid \frac{20}{3} \mid -\frac{5}{3}\right)$ und $S_4\left(-\frac{14}{3} \mid \frac{4}{3} \mid -\frac{13}{3}\right)$
8.	$S_5(2 8 -1)$ und $S_6(-6 0 -5)$
9.	$\vec{e}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$
10.	$\vec{f}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Name: _____ Datum: _____

5. RECHNEN MIT VEKTOREN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$	
2.	$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$	
3.	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	
4.	$\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -23 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 \\ 26 \\ 25 \end{pmatrix}$	
5.	$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	
6.	$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	
7.	$2 \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$	
8.	$3 \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + 4 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$	
9.	$6(3\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(4\vec{b} - 4\vec{a})$	
10.	$5(\vec{u} - \vec{v}) + 7(2\vec{u} - 3(\vec{u} - 2\vec{v}))$	

LÖSUNGEN

1.	$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -46 \\ -61 \\ -37 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ -19 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 8 \\ 52 \\ 14 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} -57 \\ -62 \\ 11 \end{pmatrix}$
9.	$26\vec{a} - 20\vec{b}$
10.	$-2\vec{u} + 37\vec{v}$

Name: _____ Datum: _____

6. LINEARE ABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	
2.	$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	
3.	$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$	
4.	$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$	
6.	$\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{7} \\ -1 \end{pmatrix}$	
7.	$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	
8.	$\vec{a}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_8 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c}_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	
9.	Der Vektor $\vec{c}_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{7} \\ -1 \end{pmatrix}$ soll in Richtung der Vektoren $\vec{a}_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_9 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zerlegt werden.	
10.	Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ soll in Richtung der Vektoren $\vec{a}_{10} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zerlegt werden.	

LÖSUNGEN

1.	$D = 0$, abhängig
2.	$D = 1$, unabhängig
3.	$D = 2\sqrt{2}$, unabhängig
4.	$D = 0$, abhängig
5.	$D = 6$, unabhängig
6.	$D = 0$, abhängig
7.	$D = 25$, unabhängig
8.	$D = 0$, abhängig
9.	$\vec{c}_9 = \frac{3}{7}\vec{a}_9 + \frac{2}{7}\vec{b}_9$
10.	$\vec{p} = \vec{a}_{10} - 2\vec{b}_{10} + 2\vec{c}_{10}$

Name: _____ Datum: _____

7. GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$A(-4 \mid 6 \mid 2), \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	
2.	$B(6 \mid -5 \mid 4), \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	
3.	$C(7 \mid 8 \mid 9), \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	
4.	$D(-5 \mid -7 \mid -6), \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$	
5.	$E(4 \mid 6 \mid 3), F(5 \mid 7 \mid 4)$	
6.	$G(-4 \mid -6 \mid -3), H(5 \mid 7 \mid 4)$	
7.	$I(12 \mid 13 \mid 17), J(-11 \mid -15 \mid -18)$	
8.	$K(-21 \mid -37 \mid -43), L(-42 \mid -18 \mid -27)$	
9.	$M(-a \mid b \mid -c), N(2(a+1) \mid -2b \mid 3c+1)$	
10.	$P(3(x-4) \mid 2(y-1) \mid -4(z+2))$ $Q(-2(x+3) \mid -3(y+4) \mid 5(z-3))$	

LÖSUNGEN

1.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
4.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$
7.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -23 \\ -28 \\ -35 \end{pmatrix}$
8.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ -37 \\ -43 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix}$
9.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ -c \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a+2 \\ -3b \\ 4c+1 \end{pmatrix}$
10.	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3x-12 \\ 2y-2 \\ -4z-8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5x+6 \\ -5y-10 \\ 9z-7 \end{pmatrix}$

Name: _____ Datum: _____

8. PUNKTPROBE (GERADE, STRAHL, STRECKE)

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, A(10 9 8)$	
2.	$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, B(-7 9 27)$	
3.	$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, C(12 10 3)$	
4.	$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, D(-7 -12 -13)$	
5.	$g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, r \geq 0, E(-18 1 31)$	
6.	$g_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, r \leq 0, F(3 2 -13)$	
7.	$g_7: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, r \geq 3, G(-22 1 17)$	
8.	$g_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, r \leq -1, H(8 -1 5)$	
9.	$g_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ -c \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq 2,$ $I\left(\frac{1}{2}a \mid -\frac{1}{2}b \mid \frac{1}{2}c\right)$	
10.	$g_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3x-12 \\ 2y-2 \\ -4z-8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -3y \\ 4z \end{pmatrix}, -2 \leq r \leq 0,$ $J(x+2 -4y-4 3z+5)$	

LÖSUNGEN

1.	Ja, $r = 2$
2.	Ja, $r = 3$
3.	Nein
4.	Nein
5.	Ja, $r = 4$
6.	Nein
7.	Ja, $r = 4$
8.	Ja, $r = -2$
9.	Ja, $r = \frac{3}{2}$
10.	Nein

Name: _____ Datum: _____

9. SKALARPRODUKT MIT BETRAG UND WINKEL

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$ \vec{a}_1 = 1, \vec{b}_1 = 2, \angle(\vec{a}_1, \vec{b}_1) = \frac{\pi}{2}$	
2.	$ \vec{a}_2 = 3, \vec{b}_2 = 4, \angle(\vec{a}_2, \vec{b}_2) = \pi$	
3.	$ \vec{a}_3 = \frac{3}{4}, \vec{b}_3 = \frac{4}{3}, \angle(\vec{a}_3, \vec{b}_3) = \frac{\pi}{4}$	
4.	$ \vec{a}_4 = \frac{12}{5}, \vec{b}_4 = \frac{15}{4}, \angle(\vec{a}_4, \vec{b}_4) = 0$	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_5, \vec{b}_5) = \frac{\pi}{6}$	
6.	$\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{24}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_6, \vec{b}_6) = \frac{\pi}{3}$	
7.	$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_7, \vec{b}_7) = \frac{3\pi}{4}$	
8.	$\vec{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_8, \vec{b}_8) = \frac{4\pi}{3}$	
9.	$\vec{a}_9 = \begin{pmatrix} k^2 \\ 3k^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_9 = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ \sqrt{5}k \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_9, \vec{b}_9) = \frac{2\pi}{3}$	
10.	$\vec{a}_{10} = \begin{pmatrix} 3p \\ 4p \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_{10} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}p \\ \frac{1}{7}p \\ \frac{2}{7}p \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}_{10}, \vec{b}_{10}) = \frac{5\pi}{6}$	

LÖSUNGEN

1.	0
2.	-12
3.	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4.	9
5.	$\frac{9}{2}$
6.	$\frac{5}{3}$
7.	$-\frac{3}{10}\sqrt{2}$
8.	$-\frac{5}{4}$
9.	$-5k^3$
10.	$-\frac{15}{14}\sqrt{3}p^2$

Name: _____ Datum: _____

10. SKALARPRODUKT MIT KOORDINATEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
2.	$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	
3.	$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	
4.	$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$	
6.	$\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$	
7.	$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{9}{4}} \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	
8.	$\vec{a}_8 = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} \\ -\frac{2}{4} \\ \frac{6}{27} \end{pmatrix}, \vec{b}_8 = \begin{pmatrix} -\frac{26}{7} \\ 2 \\ \frac{54}{12} \end{pmatrix}$	
9.	$\vec{a}_9 = \begin{pmatrix} a^2 \\ b-a \\ b \end{pmatrix}, \vec{b}_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ b+a \\ (a-b)^2 \end{pmatrix}$	
10.	$\vec{a}_{10} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ a^2b \\ \sqrt{2}a \end{pmatrix}, \vec{b}_{10} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ \frac{b}{a} \\ \frac{\sqrt{8}}{a^2} \end{pmatrix}$	

LÖSUNGEN

1.	1
2.	23
3.	-16
4.	11
5.	$-\frac{11}{6}$
6.	$-\frac{2}{7}$
7.	2
8.	-2
9.	$a - a^2 + a^2b + b^2 - 2ab^2 + b^3$
10.	$\frac{4}{a} + ab^2 + b$

Name: _____ Datum: _____

11. MIT DEM SKALARPRODUKT WINKEL BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Gesucht	Ergebnis
1.	$ \vec{a}_1 = 2, \vec{b}_1 = 4, \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 = 4$	α_1	
2.	$ \vec{a}_2 = 5, \vec{b}_2 = 3, \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0$	α_2	
3.	$ \vec{a}_3 = \sqrt{3}, \vec{b}_3 = \sqrt{3}, \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 = 3$	α_3	
4.	$ \vec{a}_4 = \sqrt{5}, \vec{b}_4 = \sqrt{20}, \vec{a}_4 \cdot \vec{b}_4 = -5$	α_4	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	α_5	
6.	$\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	α_6	
7.	$\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	α_7	
8.	$\vec{a}_8 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_8 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	α_8	
9.	$\vec{a}_9 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}, \vec{b}_9 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix},$ $\alpha_9 = 90^\circ$	k	
10.	$\vec{a}_{10} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_{10} = \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -2p \end{pmatrix},$ $\alpha_{10} = 60^\circ$	p	

LÖSUNGEN

1.	$\alpha_1 = 60^\circ$
2.	$\alpha_2 = 90^\circ$
3.	$\alpha_3 = 0^\circ$
4.	$\alpha_4 = 120^\circ$
5.	$\alpha_5 \approx 48,2^\circ$
6.	$\alpha_6 \approx 42,8^\circ$
7.	$\alpha_7 = 0^\circ$
8.	$\alpha_8 \approx 88,1^\circ$
9.	$k = -10$
10.	$p = \frac{1}{2}$

Name: _____ Datum: _____

12. DAS VEKTORPRODUKT BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{b}_1$	
2.	$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{b}_2$	
3.	$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \vec{a}_3 \times \vec{b}_3$	
4.	$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c}_4 = \vec{a}_4 \times \vec{b}_4$	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_5 = \vec{b}_5 \times \vec{a}_5$	
Für die Aufgaben 6., 7., 8. gilt: $\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$		
6.	$\vec{d}_6 = (\vec{a}_6 - \vec{b}_6) \times \vec{c}_6$	
7.	$\vec{d}_7 = (2\vec{c}_6 - \vec{a}_6) \times (-\vec{b}_6)$	
8.	$\vec{d}_8 = (2\vec{b}_6) \times (\vec{c}_6 - 2\vec{a}_6)$	
9.	$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$	
10.	$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$	

LÖSUNGEN

1.	$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2.	$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3.	$\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4.	$\vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
5.	$\vec{c}_5 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix}$
6.	$\vec{d}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$
7.	$\vec{d}_7 = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$
8.	$\vec{d}_8 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 32 \end{pmatrix}$
9.	$\vec{0}$
10.	$2(\vec{b} \times \vec{a})$

Name: _____ Datum: _____

13. DAS SPATPRODUKT BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
2.	$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	
3.	$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	
4.	$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$	
5.	$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	
6.	$\vec{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c}_6 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	
7.	Berechne k, wenn das Spatprodukt gleich 16 ist! $\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_7 = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	
8.	Berechne k, wenn das Spatprodukt gleich -4 ist! $\vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 2k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_7 = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 2k \end{pmatrix}$	
9.	Stelle fest, ob der folgende Term definiert ist. Handelt es sich gegebenenfalls um einen Vektor oder Skalar? $\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{c} \times \vec{d})$	
10.	Stelle fest, ob der folgende Term definiert ist. Handelt es sich gegebenenfalls um einen Vektor oder Skalar? $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$	

LÖSUNGEN

1.	1
2.	-8
3.	54
4.	29
5.	-11
6.	-103
7.	$k = 3$
8.	$k = 1$
9.	Nicht definiert
10.	Skalar

Name: _____ Datum: _____

14. ABSTÄNDE (PUNKT-PUNKT, PUNKT-GERADE) BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$A(2 4 7), B(5 7 9)$	
2.	$C(-2 -4 -7), D(5 7 9)$	
3.	$E(2 4 7), F(-5 -7 -9)$	
4.	$G(-2 -4 -7), H(-5 -7 -9)$	
5.	$I(2a -a 4a), J(-a 3a 4a)$	
6.	$g_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, K(2 3 4)$	
7.	$g_7: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, L(-2 -3 -4)$	
8.	$g_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, M(13 -5 0)$	
9.	$g_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, N(-2 -5 7)$	
10.	Für welche Werte von a ist der Abstand zwischen O und g_{10} gleich 7? $g_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, O(6 7 -3)$	

LÖSUNGEN

1.	$\sqrt{22}$
2.	$\sqrt{426}$
3.	$\sqrt{426}$
4.	$\sqrt{22}$
5.	$5a$
6.	$\sqrt{2}$
7.	$\sqrt{2}$
8.	0
9.	$\frac{\sqrt{7409}}{\sqrt{77}}$
10.	$a_1 = -2, a_2 = -54$

Name: _____ Datum: _____

15. ABSTÄNDE (PUNKT-EBENE, GERADE-GERADE) BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$A(1 1 1), E_1: x + y = 2$	
2.	$B(1 1 1), E_2: x + y + z = 2$	
3.	$C(2 1 2) E_3: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	
4.	$D(1 2 1) E_4: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$	
5.	$E(2 2 2); E_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	
6.	$g_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, h_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	
7.	$g_7: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, h_7: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	
8.	$g_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, h_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	
9.	$g_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, h_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	
10.	$g_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	

LÖSUNGEN

1.	0
2.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
3.	$\frac{3\sqrt{14}}{7}$
4.	$\frac{4\sqrt{14}}{7}$
5.	$\frac{9}{\sqrt{65}}$
6.	0
7.	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
8.	0
9.	$\frac{18}{\sqrt{195}}$
10.	$\frac{12}{\sqrt{21}}$

Name: _____ Datum: _____

16. ABSTÄNDE (GERADE-EBENE, EBENE-EBENE) BERECHNEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_1: z = 1$	
2.	$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2: y = -2$	
3.	$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, E_3: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$	
4.	$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3,5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, E_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
5.	$g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, E_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
6.	$E_6: x + y + z = 2, F_6: 3x + 3y + 3z = 4$	
7.	$E_7: x + y - z = 4, F_7: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	
8.	$g_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, h_8: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	
9.	$g_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, h_9: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	
10.	$g_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h_{10}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	

LÖSUNGEN

1.	0
2.	3
3.	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
4.	5
5.	0
6.	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
7.	0
8.	0
9.	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
10.	$3\sqrt{2}$

Name: _____ Datum: _____

17. KREISGLEICHUNGEN

Nr.	Gegeben	Gesucht	Ergebnis
1.	$M_1(0 0), r_1 = 2$	Kreisgleichung	
2.	$M_2(2 1), r_2 = 1$	Kreisgleichung	
3.	$M_3(-4 -3), r_3 = \frac{6}{5}$	Kreisgleichung	
4.	$M_4(-2 5), r_4 = \frac{7}{8}$	Kreisgleichung	
5.	$M_5(2 2), P_5(3 3)$ auf k_5	Kreisgleichung	
6.	$M_6(6 -3), P_6(3 1)$ auf k_6	Kreisgleichung	
7.	$M_7(-2 4), r_7 = 8, x_{P_7} = 6$	y_{P_7}	
8.	$M_8(3 -5), r_8 = \sqrt{37}, y_{P_8} = 1$	x_{P_8}	
9.	$M_9\left(-\frac{1}{a} -b\right), r_9 = \left(-\frac{1}{x_M} - \frac{1}{y_M}\right)^2$	Kreisgleichung	
10.	$M_{10}(a -4), r_{10} = \sqrt{40}, x_{P_{10}} = 7a$	Für welche a liegt P_{10} auf k_{10} ?	

LÖSUNGEN

1.	$x^2 + y^2 = 4$
2.	$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$
3.	$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = \frac{36}{\sqrt{25}}$
4.	$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = \frac{49}{\sqrt{64}}$
5.	$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$
6.	$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$
7.	$y_{P_7} = 4$
8.	$x_{P_8} = 2$
9.	$\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + (y + b)^2 = a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}$
10.	$a_1 \geq \frac{2}{9}, a_2 \leq -\frac{2}{9}$

Name: _____ Datum: _____

18. KREIS UND PUNKT

Nr.	Gegeben	Gesucht	Ergebnis
1.	$k_1 : x^2 + y^2 = 16, P_1(4 0)$	Lagebeziehung	
2.	$k_2 : x^2 + y^2 = 25, P_2(3 3)$	Lagebeziehung	
3.	$k_3 : x^2 + y^2 = 25, P_3(3 4)$	Lagebeziehung	
4.	$k_4 : x^2 + y^2 = 25, P_4(4 4)$	Lagebeziehung	
5.	$M_5(1 1), r_5 = \sqrt{2}, P_5(2 3)$	Lagebeziehung	
6.	$M_6(1 1), r_6 = 2, P_6(2 y_6)$	y_6	
7.	$M_7(2 -4), r_7 = \frac{1}{2}, P_7(x_7 -4)$	x_7	
8.	$M_8(1 -\frac{2}{3}), r_8 = \frac{1}{9}, P_8(1 y_8)$	y_8	
9.	$M_9(a b), r_9 = a^2 + b^2, P_9(2a y_9)$	y_9	
10.	$M_{10}(a b), r_{10} = a^2 + b^2, P_{10}(3a y_{10})$	y_{10} in Abhängigkeit von a	

LÖSUNGEN

1.	$P_1 \in k_1$
2.	P_2 innerhalb von k_2
3.	$P_3 \in k_3$
4.	P_4 außerhalb von k_4
5.	P_5 außerhalb von k_5
6.	$y_{6_1} = -\sqrt{3} + 1, y_{6_2} = \sqrt{3} + 1$
7.	$x_{7_1} = \frac{3}{2}, x_{7_2} = \frac{5}{2}$
8.	$t_1 : 5x + 12y + 239 = 0$ $t_2 : 5x - 12y + 119 = 0$
9.	$y_{9_1} = -\frac{7}{9}, y_{9_2} = -\frac{5}{9}$
10.	keine Lösung: $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$ eine Lösung $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ zwei Lösungen $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Name: _____ Datum: _____

19. KREISTANGENTE

Nr.	Gegeben	Gesucht	Ergebnis
1.	$M_1(0 0), r_1 = \sqrt{5}, P_1(2 1)$	Tangentengleichung	
2.	$M_2(0 0), r_2 = \sqrt{13}, P_2(3 2)$	Tangentengleichung	
3.	$M_3(0 0), P_3(-3 4)$	Tangentengleichung	
4.	$M_4(0 0), P_4(5 -2)$	Tangentengleichung	
5.	$M_5(3 1), r_5 = 2, P_5(1 1)$	Tangentengleichung	
6.	$M_6(3 1), r_6 = 2, P_6(3 3)$	Tangentengleichung	
7.	$M_7(2 3), P_7(-1 8)$	Tangentengleichung	
8.	$k_8 : x^2 + y^2 + 4x + 10y - 140 = 0$ $P_8(-7 y_8)$	Tangentengleichungen	
9.	$x^2 + y^2 = 6,25, g_9 : 4x - 3y = 6$	Tangenten $\parallel g_9$	
10.	$k_{10} : x^2 + y^2 + 4x - 8y - 80 = 0$ $g_{10} : 4x - 3y = 0$	Tangenten $\perp g_{10}$	

LÖSUNGEN

1.	$2x + y = 5$
2.	$3x + 2y = 30$
3.	$-3x + 4y = 25$
4.	$5x - 2y = 29$
5.	$x = 1$
6.	$y = 3$
7.	$-3x + 5y = 43$
8.	$t_1 : 5x + 12y + 239 = 0$ $t_2 : 5x - 12y + 119 = 0$
9.	$t_1 : y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{6}$ $t_2 : y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{6}$
10.	$t_1 : 3x + 4y - 60 = 0$ $t_2 : 3x + 4y + 40 = 0$

Name: _____ Datum: _____

20. KREIS UND GERADE

Bestimme die Lagebeziehung und gegebenenfalls die Koordinaten gemeinsamer Punkte!

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$k_1 : x^2 + y^2 = 8, g_1 : y = x$	
2.	$k_2 : x^2 + y^2 = 9, g_2 : y = -x$	
3.	$M_3(2 2), r_3 = 4, g_3 : y = -x$	
4.	$M_4(2 -3), r_4 = 4, g_4 : y = x + 2$	
5.	$M_5(2 -3), r_5 = 4, g_4 : y = 1$	

LÖSUNGEN

1.	Sehne: $S_{11}(-2 -2), S_{12}(2 2)$
2.	Sehne: $S_{21}(-\sqrt{4,5} \sqrt{4,5}), S_{22}(\sqrt{4,5} -\sqrt{4,5})$
3.	Sehne: $S_{31}(-2 2), S_{12}(2 -2)$
4.	Passante
5.	Tangente: $S_5(2 1)$

Name: _____ Datum: _____

21. ZWEI KREISE

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	innere oder äußere Berührung $k_{11} : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ $k_{12} : (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 64$	
2.	innere oder äußere Berührung $k_{21} : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$ $k_{22} : (x - 7)^2 + (y - 8)^2 = 16$	
3.	innere oder äußere Berührung $k_{31} : x^2 + y^2 + 10x - 14y - 47 = 0$ $k_{32} : x^2 + y^2 - 6x + 16y + 37 = 0$	
4.	Schnittpunkte beider Kreise $k_{41} : x^2 + y^2 + 3x - 2y - 17 = 0$ $k_{42} : x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0$	
5.	Schnittwinkel beider Kreise $k_{51} : x^2 + y^2 - 22x + 4y + 25 = 0$ $k_{42} : x^2 + y^2 - 25 = 0$	

LÖSUNGEN

1.	Berührung von innen
2.	keine Berührung
3.	Berührung von außen
4.	$S_{41}(1,2 - 2,6), S_{42}(3 1)$
5.	$\alpha = 90^\circ$

Name: _____ Datum: _____

22. KUGELGLEICHUNGEN

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$M_1(0 0 0), r_1 = 3$	
2.	$M_2(1 1 1), r_2 = 2$	
3.	$M_3(1 1 1), P_3(2 2 2)$	
4.	$M_4(1 0 1), P_4(0 4 5)$	
5.	$M_5(-4 -2 7), P_5(3 -1 2)$	
6.	$M_6\left(\frac{3}{2} \left \frac{1}{2} \right \frac{7}{2}\right), P_6(2 1 4)$	
7.	M_7 und r_7 berechnen $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}z = \frac{43}{3}$	
8.	M_8 und r_8 berechnen $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z + 1 = 0$	
9.	$M_9\left(\frac{2}{5} \left -\frac{3}{5} \right \frac{4a}{5}\right), P_9\left(-\frac{2}{5} -1 \frac{9a}{5}\right)$	
10.	$M_{10}\left(\frac{1}{7} \left -\frac{2a}{7} \right \frac{b}{7}\right), P_{10}\left(-\frac{4}{7} -a \frac{8b}{7}\right)$	

LÖSUNGEN

1.	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2.	$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$
3.	$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$
4.	$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 33$
5.	$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 7)^2 = 85$
6.	$(x - 1,5)^2 + (y - 0,5)^2 + (z - 3,5)^2 = 0,75$
7.	$M_7 \left(\frac{2}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{4}{3} \right), r_7 = \sqrt{\frac{50}{3}}$
8.	Keine Kugelgleichung, denn $r_8^2 = -\frac{19}{72}$
9.	$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{4a}{5}\right)^2 = a^2 + \frac{4}{5}$
10.	$\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{7}a\right)^2 + \left(z - \frac{b}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}a^2 + b^2 + \frac{25}{49}$

Name: _____ Datum: _____

23. KUGEL UND PUNKT

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$k_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 16, P_1(0 0 4)$	
2.	$k_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, P_2(3 0 4)$	
3.	$k_3 : x^2 + y^2 + z^2 = 169, P_3(0 -12 -5)$	
4.	$k_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 900, P_1(20 0 21)$	
5.	$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 49$ $P_5(2 -9 4)$	
6.	Bestimme M_6 und die Lage von P_6 ! $x^2 + 6x + y^2 - 4y + z^2 + 10z + 29 = 0$ $P_6(-2 4 -3)$	
7.	Bestimme M_7 und die Lage von P_7 ! $x^2 - 3x + y^2 + 0,5y + z^2 - z + \frac{5}{16} = 0$ $P_7(2,5 -0,75 0,5)$	
8.	Bestimme M_8 und die Lage von P_8 ! $x^2 - \frac{8}{3}x + y^2 - \frac{2}{3}y + z^2 + \frac{8}{3}z + \frac{11}{9} = 0$ $P_7\left(\frac{7}{3} \middle \frac{4}{3} \middle 1\right)$	
9.	Für welche a liegt P_9 innerhalb von k_9 ? $P_9(a 4 5)$ $k_9 : x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 2 = 0$	
10.	Für welche b liegt P_{10} außerhalb von k_{10} ? $P_{10}(2 1 b)$ $k_{10} : x^2 - 10x + y^2 + 6y + z^2 + 10z + 30 = 0$	

LÖSUNGEN

1.	P_1 liegt auf k_1 .
2.	P_2 liegt auf k_2 .
3.	P_3 liegt auf k_3 .
4.	P_4 liegt innerhalb von k_4 .
5.	P_5 liegt außerhalb von k_5 .
6.	$M_6(-3 \mid 2 \mid -5)$, P_6 liegt auf k_6 .
7.	$M_7\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\right)$, P_7 liegt innerhalb von k_7 .
8.	$M_8\left(\frac{4}{3} \mid \frac{1}{3} \mid -\frac{4}{3}\right)$, P_8 liegt außerhalb von k_8 .
9.	P_9 innerhalb von k_9 für $-1 < a < 3$.
10.	P_{10} außerhalb von k_{10} für $b < -7$ oder $b > -3$.

Name: _____ Datum: _____

24. KUGEL UND GERADE

Nr.	Gegeben	Ergebnis
1.	$k_1 : \vec{x}^2 = 4, g_1 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
2.	$k_2 : \vec{x}^2 = 9, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
3.	$k_3 : \vec{x}^2 = 9, g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
4.	$k_4 : \vec{x}^2 = 14, g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
5.	$k_5 : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = 16$ $g_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	

LÖSUNGEN

1.	g_1 schneidet k_1
2.	g_2 schneidet k_2
3.	g_3 schneidet k_3 nicht
4.	g_4 ist Tangente an k_4
5.	g_5 schneidet k_5