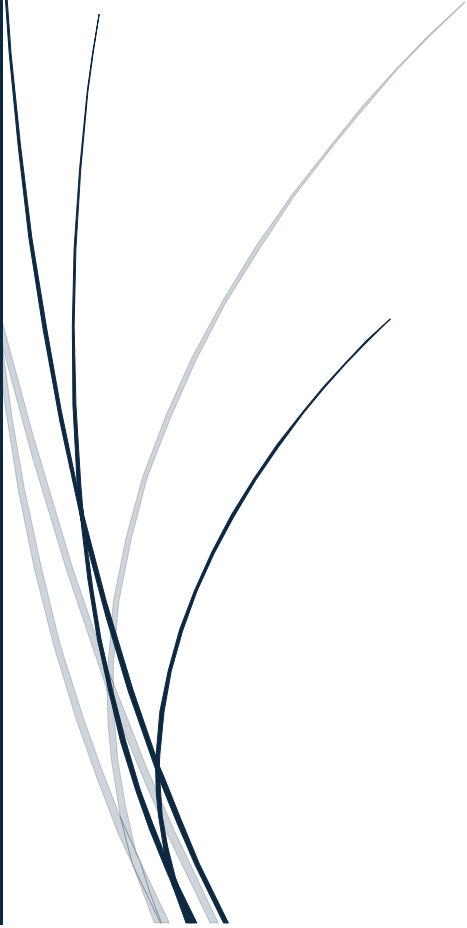




26.5.2025

Mechanik 1

Lernen mit Stufen



Ralf Benzmann

Vorbemerkung	4
1. Der Weg	5
1.1. Stufe 1: Definition, Einheiten, Messen	5
1.2. Stufe 2: Wegeinheiten und ihre Umrechnung	6
1.3. Stufe 3: Andere Wegeinheiten	7
1.4. Stufe 4: Physikalische Beschreibung	8
2. Die Zeit	9
2.1. Stufe 1: Definition, Einheiten, Messen	9
2.2. Stufe 2: Zeiteinheiten	10
2.3. Stufe 3: Zeiteinheiten und ihre Umrechnung	11
2.4. Stufe 4: Definition der Sekunde	12
2.5. Stufe 5: Was ist Zeit?	12
3. Mechanische Bewegungen	13
3.1. Stufe 1: Bewegungen und Bezugskörper	13
3.2. Stufe 2: Bewegungsarten	14
3.3. Stufe 3: Wichtige Bewegungsformen	15
3.4. Stufe 4: Inertialsysteme	15
4. Die Geschwindigkeit	16
4.1. Stufe 1: Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung	16
4.2. Stufe 2: Die Durchschnittsgeschwindigkeit	17
4.3. Stufe 3: Die Geschwindigkeit verändert sich gleichmäßig - Beschleunigung	18
4.4. Stufe 4: Die Geschwindigkeit verändert sich gleichmäßig	19
4.5. Stufe 5: Das zugehörige Python – Programm	21
5. Der Zusammenhang von Weg, Zeit und Geschwindigkeit	22
5.1. Stufe 1: Der einfachste Fall	22
5.2. Stufe 2: Die Beschleunigung kommt dazu	23
5.3. Stufe 3: Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit	25
5.4. Stufe 4: Bewegung und höhere Mathematik	26
6. Diagramme	28
6.1. Stufe 1: Diagramme der geradlinig gleichförmigen Bewegung	28
6.2. Stufe 2: Erweiterung der Diagramme aus Stufe 1	30
6.3. Stufe 3: Diagramme der gleichmäßig beschleunigten Bewegung	31
6.4. Stufe 4: Bedeutung der Flächen in den Diagrammen	32
6.5. Stufe 5: Der allgemeine Fall	33
6.6. Stufe 6: Eine Reise zum Stern Wega	36
7. Vektoren	37
7.1. Stufe 1: Grundlagen	37

7.2.	Stufe 2: Addition von parallelen Vektoren-----	38
7.3.	Stufe 3: Addition von senkrechten Vektoren-----	39
7.4.	Stufe 4: Addition von beliebigen Vektoren -----	41
7.5.	Stufe 5: Zerlegung einer resultierenden Geschwindigkeit -----	42
7.6.	Stufe 6: Rechnen mit Vektoren -----	44
7.7.	Stufe 7: Das zugehörige Python – Programm -----	45
8.	Hilfsmittel-----	47

Vorbemerkung

Die vorliegenden Abschnitte folgen einem Stufenprogramm.

Diese Stufen lassen eine flexible Vorgehensweise zu.

Jeder Leser kann selbst entscheiden, ob er in einem Abschnitt alle Stufen oder nur Teile davon durcharbeiten will.

Von Abschnitt zu Abschnitt kann beliebig zwischen den Stufen gewechselt werden.

Auch können einzelne Abschnitte entfallen.

Das folgende Material „Mechanik 1“ wurde von mir verfasst, nicht von einem Sprachmodell, einer sogenannten „KI“.

Eine KI macht das Lernen sicher anders, aber nicht unbedingt besser.

Eine KI ersetzt nicht eigenes Wissen und Können und auch nicht die Entwicklung eigener Fertigkeiten und Fähigkeiten.

Diese können nur durch eine intensive Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten und umfangreiches Üben erworben werden.

Wie jede Wissenschaft hat die Physik eine eigene Sprache. Dazu gehören Vokabeln wie die physikalischen Größen und ihre Einheiten, Gesetze und Mathematik.

Letztendlich lebt die Physik von dem Erkennen und Verstehen von Zusammenhängen.

Das vorliegende Material steht unter der Lizenz CC BY-NC-ND 4.0 **Namensnennung-Nicht kommerziell-Keine Bearbeitungen 4.0 International**.

Ralf Benzmann

Templin, im Mai 2025

1. Der Weg

1.1. Stufe 1: Definition, Einheiten, Messen

Der Begriff „Weg“ hat für uns im täglichen Sprachgebrauch eine bestimmte Bedeutung. Er ist für uns ein Teil des Erdbodens und wir können auf ihm entlanggehen oder entlangfahren. Wir können aber auch im Wasser schwimmen oder durch die Luft fliegen. In diesen Fällen sprechen wir oft davon, dass wir einen bestimmten Weg zurückgelegt haben, meinen also die Entfernung.

In der Physik ist der Weg die Bahn eines Körpers, auf der er sich entlangbewegt. Man kann sich die Bahn zeichnerisch als dünne gerade oder gekrümmte Linie vorstellen. Für uns reicht es an dieser Stelle zunächst aus, dass wir den Weg im Sinne von „Weglänge“ verwenden. Dadurch bleiben unsere physikalischen Überlegungen einfach und übersichtlich.

Festlegung: Der **Weg s** beschreibt in der Physik die Entfernung zwischen zwei Punkten, Anfang und Ende des Weges.

Diese Entfernung müssen wir messen können. Dafür benötigen wir einen Maßstab. Früher verwendeten die Menschen z. Bsp. die Länge des Ellenbogens. Da diese Länge aber immer unterschiedlich ist, war eine solche Messung ungenau. Wenn alle Menschen denselben Maßstab verwenden, wird der Vergleich von Weglängen einfach. Deshalb wurde bereits 1799 unser „Meter“ als Maßstab erfunden, wobei in Deutschland das Meter erst 1872 eingeführt wurde. In der Physik ist das Meter kein Maßstab, sondern eine Einheit. Die Einheit „Meter“ hat das Kurzzeichen „m“. Das Wort „Meter“ stammt aus der altgriechischen Sprache und bedeutet so viel wie Maß oder Länge.

Da in der Physik auch Berechnungen durchgeführt werden müssen, wäre es zu umständlich, in den Gleichungen ganze Wörter zu schreiben. Deshalb haben die Physiker Symbole, also Formelzeichen festgelegt. Für den Weg verwenden wir das Formelzeichen „s“ von dem lateinischen Wort „Spatium“ für Strecke.

ZUSAMMENFASSUNG

Physikalische Größe: Weg			
Formelzeichen	Name	Einheit	Kurzzeichen
s	Spatium	Meter	m

In Berechnungen verwenden wir in der Physik grundsätzlich die Einheit Meter. Die Einheiten Millimeter, Zentimeter, Dezimeter und Kilometer sind vom Meter abgeleitet.

1.2. Stufe 2: Weeinheiten und ihre Umrechnung

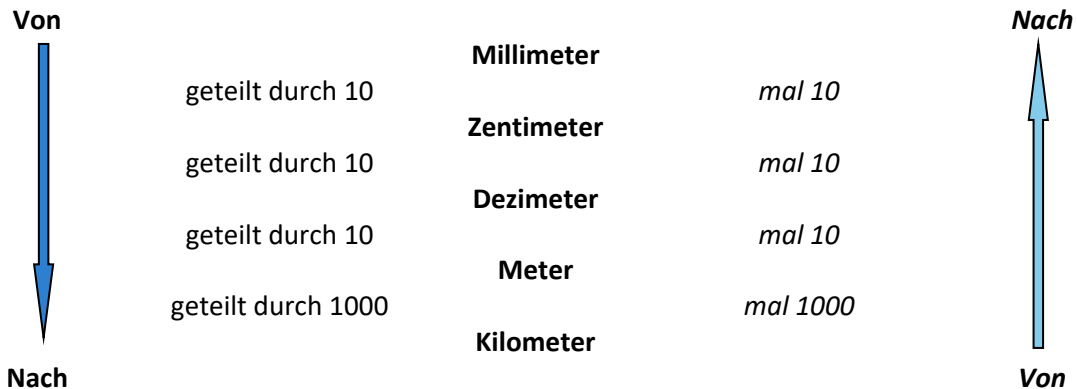
Das folgende Bild zeigt ein Bandmaß und wir können auf ihm mehrere verschiedene Weeinheiten erkennen: Millimeter, Zentimeter, Dezimeter und Meter.



Die Silben „Milli“, „Zenti“, „Dezi“ und „Kilo“ haben eine besondere Bedeutung. Die Grundeinheit ist das Meter. Die folgende Tabelle zeigt die Bedeutung:

Milli	Ein Tausendstel	Der tausendste Teil eines Meters oder 0,001 m
Zenti	Ein Hundertstel	Der hundertste Teil eines Meters oder 0,01 m
Dezi	Ein Zehntel	Der zehnte Teil eines Meters oder 0,1 m
Kilo	Das Tausendfache	1000 m

Mit Hilfe dieser Übersicht können wir uns klarmachen, wie diese Weeinheiten ineinander umgerechnet werden können:



Die folgenden Beispiele sollen dir helfen, die Umrechnungen zu verstehen:

Umrechnung ohne Überspringen einer Einheit

13 mm = 1,3 cm (13 geteilt durch 10 = 1,3)

3,7 cm = 37 mm (3,7 mal 10 = 37)

24 dm = 2,4 m (24 geteilt durch 10 = 2,4)

1,8 m = 18 dm (1,8 mal 10 = 18)

880 m = 0,88 km (880 geteilt durch 1000 = 0,88)

2,1 km = 2100 m (2,1 mal 1000 = 2100)

Umrechnung mit Überspringen einer Einheit

36 mm = 0,36 dm (36 geteilt durch 100 = 0,36)

4,5 dm = 450 mm (4,5 mal 100 = 450)

2500 mm = 2,5 m (2500 geteilt durch 1000 = 2,5)

7,6 m = 7600 mm (7,6 mal 1000)

5 km = 50000 dm (5 mal 1000 mal 10)

3 cm = 0,00003 km

Beim Umrechnen von einer kleineren in eine größere Einheit wird mit dem Umrechnungsfaktor dividiert.

Beim Umrechnen von einer größeren in eine kleinere Einheit wird mit dem Umrechnungsfaktor multipliziert.

Wird eine Einheit übersprungen, so müssen zwei Umrechnungsfaktoren verwendet werden.

1.3. Stufe 3: Andere Weeinheiten

Fremde Längeneinheiten sind solche, die in der Wissenschaft oder in der Praxis verwendet werden, dir aber nur selten begegnen. Einige sind hier aufgeführt. Im Internet findest du viele weitere Beispiele, auch für solche, die nur vor langer Zeit benutzt wurden.

Lichtjahr (ly)	etwa 9 460 528 000 000 000 m	Astronomie
Seemeile (sm)	1852 m	Navigation auf See
Landmeile (mi)	1482 m	GB, USA
Yard (yd)	0,9144 m	USA
Fuß (ft)	0,3048 m	Luftfahrt
Zoll (in)	0,0254 m	Rohrdurchmesser
Punkt (pt)	0,000352778 m	Desktop-Publishing
Nanometer (nm)	0,000 000 001 m	Atomphysik

Weltweit wird bei den Einheiten das internationale SI – System verwendet, nur drei Länder, insbesondere die USA, machen da eine Ausnahme. SI ist die Abkürzung von „Système international d’unités“.

Im SI – System sind das „Meter“, das „Kilogramm“ und die „Sekunde“ Grundeinheiten.

Das Lichtjahr (ly von light-year) ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Der Stern Altair im Sternbild Adler ist 16,73 ly von uns entfernt und gut mit dem bloßen Auge zu sehen. Was du dann siehst, ist aber der Stern, wie er vor 16,73 Jahren aussah.

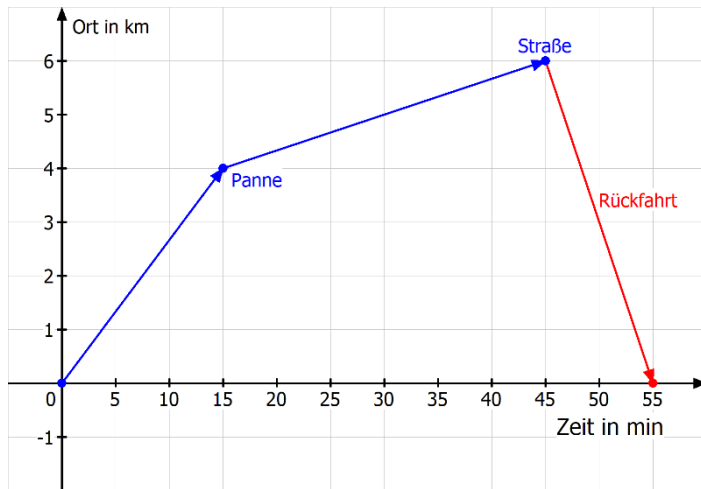
Genauso können wir uns auch unter einem Nanometer kaum etwas vorstellen. Wenn ein menschliches Haar einen Durchmesser von 0,05 mm oder 0,0005 m hat, müsste man es 5 000 000 mal teilen, um einen Nanometer zu erhalten.

Zeitungen und Zeitschriften werden am Computer mit einer speziellen Software erstellt, mit deren Hilfe Texte und Bilder auf einer Seite angeordnet werden können. Dabei werden auch verschiedene Schriftgrößen verwendet. Wenn du mit einer Textverarbeitung schreibst, kannst du nicht nur die Schriftart, sondern auch die Schriftgröße einstellen. Oft gibt es hier einen Bereich von 8 bis 72. Hierbei handelt es sich um die Einheit Punkt.

1.4. Stufe 4: Mathematische Beschreibung

Für die Beschreibung von Bewegungen ist ein Koordinatensystem unerlässlich. An dieser Stelle soll die Beschreibung des Ortes in Abhängigkeit von der Zeit genügen.

Beispiel: Du fährst mit dem Fahrrad 15 min durch den Wald. Leider verliert ein Reifen Luft und du musst dein Fahrrad 30 min bis zur nächsten Straße schieben. Dort wirst du dann abgeholt.



Der Start erfolgt im Bezugspunkt $(0|0)$, das könnte das Wohnhaus sein. In 15 min wurden 4 km zurückgelegt. In weiteren 30 min waren es nur 2 km, insgesamt also in 45 min 6 km. Die Rückfahrt dauerte 10 min $(55 - 45)$.

Der Weg s verändert sich in Abhängigkeit von der Zeit t , er ist also eine Funktion der Zeit.

Der Weg ist eine Funktion der Zeit: $s = s(t)$

In der Physik wird zwischen skalaren und vektoriellen Größen unterschieden. Der Weg ist eine vektorielle Größe, denn er hat zwei Eigenschaften:

- Er besitzt eine Länge (Zahlenwert und Einheit).
- Er besitzt eine Richtung.

Vektoren werden in der Physik als Pfeile gezeichnet (siehe Abbildung oben). Der Pfeil beginnt im Anfangspunkt und die Pfeilspitze befindet sich am Endpunkt.

Die mathematische Beschreibung einer Bewegung im Raum erfolgt mit Ortsvektoren:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

Der zurückgelegte Weg $\Delta\vec{r}$ ist dann die Differenz zweier Ortsvektoren $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_1$:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y + (z_2 - z_1) \cdot \vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z$$

Der Betrag dieses Vektors ist $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Bei einer Bewegung verändern sich die drei Koordinaten x, y, z in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

Dadurch wird die Bahnkurve des Körpers im Raum beschrieben.

2. Die Zeit

2.1. Stufe 1: Definition, Einheiten, Messen

Wenn wir im alltäglichen Leben von der Zeit sprechen, meinen wir damit im Allgemeinen die Uhrzeit. Unser Leben verläuft immer von der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft und wir können diese Richtung nicht umkehren, auch wenn wir uns das manchmal wünschen. Dann gibt es für uns die gefühlte Zeit, Abschnitte, die uns sehr lang oder sehr kurz vorkommen.

In der Physik müssen wir messen können, wie lange ein Vorgang, zum Beispiel die Bewegung von einem Ort zum anderen, dauert. Hier beschreibt die Zeit also die Aufeinanderfolge von Ereignissen. Ein Fließen der Zeit gibt es jedoch physikalisch gesehen nicht, denn die Zeit ist keine Flüssigkeit oder irgendein anderer Stoff.

Festlegung: Die **Zeit t** beschreibt in der Physik die Aufeinanderfolge von Ereignissen und die Dauer von Vorgängen.

Unseren Vorfahren ist schon vor mehreren tausend Jahren aufgefallen, dass sich bestimmte Vorgänge in der Natur regelmäßig wiederholen. Auf dieser Grundlage konnten sie einen Kalender erschaffen, unsere siebentägige Woche geht wahrscheinlich auf die Babylonier zurück. Wir benutzen heute den sogenannten „Gregorianischen Kalender“. Dabei beruht die Einteilung des Jahres in Monate auf der Bewegung des Mondes um die Erde. Das ein Tag vierundzwanzig Stunden hat, haben wir den alten Ägyptern zu verdanken. Eine Stunde hat sechzig Minuten und eine Minute sechzig Sekunden. Das weicht von unserem üblichen Zehnersystem ab und hat seinen Ursprung im babylonischen Sexagesimalsystem, in dem also die Zahl 60 eine entscheidende Rolle spielt.

Da in der Physik auch Berechnungen durchgeführt werden müssen, wäre es zu umständlich, in den Gleichungen ganze Wörter zu schreiben. Deshalb haben die Physiker Symbole, also Formelzeichen festgelegt. Für die Zeit verwenden wir das Formelzeichen „ t “ von dem lateinischen Wort „Tempus“ für Zeit.

ZUSAMMENFASSUNG

Physikalische Größe: Zeit			
Formelzeichen	Name	Einheit	Kurzzeichen
t	Tempus	Sekunde	s

Der Buchstabe s ist hier also das Kurzzeichen für die Einheit Sekunde. Du darfst es nicht mit dem s für die physikalische Größe Weg verwechseln!

In Berechnungen verwenden wir in der Physik grundsätzlich die Einheit Sekunde. Die Einheiten Minute, Tag, Woche, Monat, Jahr sind abgeleitet.

2.2. Stufe 2: Zeiteinheiten

Diese Tabelle enthält einige Zeiteinheiten mit einem Hinweis zur Herkunft des Namens und dem Kurzzeichen.

Zeiteinheit	Herkunft	Kurzzeichen
Millisekunde	Der tausendste Teil einer Sekunde	ms
Zentisekunde	Der hundertste Teil einer Sekunde	Wird nicht verwendet
Dezisekunde	Der zehnte Teil einer Sekunde	Wird nicht verwendet
Sekunde	Von „secundus“ (lat.)	s, Grundeinheit in der Physik
Minute	Von „minuere“ (lat.)	min
Stunde	Von „stunta“ (althochdeutsch)	h (von „hora“)
Tag	Von „tac“ (mittelhochdeutsch)	d (von „dies“)
Jahr	Von „annus“ (lat.)	a

In dieser Tabelle findest du den Zusammenhang zwischen einigen Zeiteinheiten.

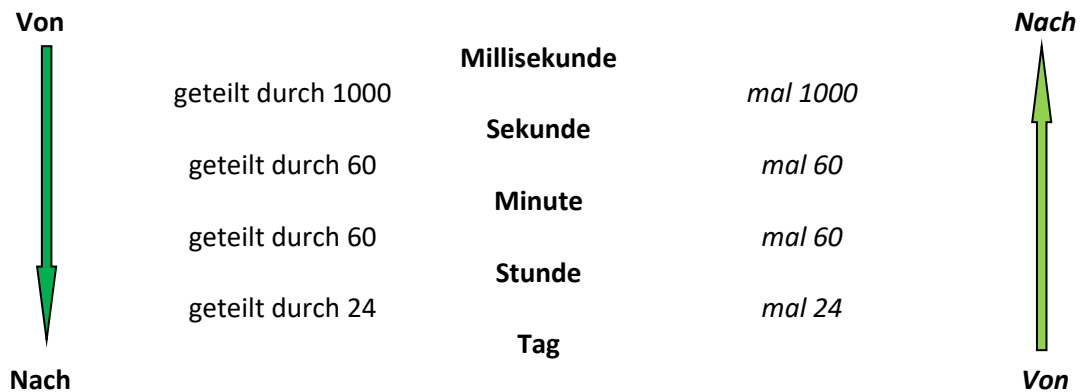
Millisekunde	$1 \text{ ms} = 1/1000 \text{ s}$
Sekunde	$1 \text{ s} = 1/60 \text{ min} = 1/3600 \text{ h} = 1000 \text{ ms}$
Minute	$1 \text{ min} = 60 \text{ s} = 1/60 \text{ h}$
Stunde	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
Tag	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 86400 \text{ s}$
Woche	7 d
Monat	30 oder 31 d
Jahr	356 oder 366 d
Dekade	10 a

Wir messen die Zeit mit Hilfe einer Uhr. Uhren gibt es in sehr vielen verschiedenen Ausführungen und Bauarten. Über eine Batterie angetriebene Uhren haben sich weitgehend durchgesetzt und die mechanischen Uhren abgelöst, eine Pendeluhr in einem Haushalt ist schon eine Seltenheit. Außerdem werden oft Funkuhren verwendet, die über ein elektromagnetisches Signal gesteuert werden. Im rechten Bild siehst du einen Funkwecker, beschriftet mit der „RADIO CONTROLLED – DCF“. Das „D“ bedeutet Deutschland, „C“ Langwellensender und „F“ in der Nähe von Frankfurt (Main). Der genaue Standort dieses Senders ist der Ortsteil Mainflingen in Mainhausen.



2.3. Stufe 3: Zeiteinheiten und ihre Umrechnung

Mit Hilfe dieser Übersicht können wir uns klarmachen, wie die Zeiteinheiten ineinander umgerechnet werden können:



Die folgenden Beispiele sollen dir helfen, die Umrechnungen zu verstehen:

Umrechnung ohne Überspringen einer Einheit

130 ms = 0,13 s (130 geteilt durch 1000 = 0,13) 3,7 s = 3700 ms (3,7 mal 1000 = 3700)

240 s = 4 min (240 geteilt durch 60 = 4) 1,8 min = 108 s (1,8 mal 60 = 108)

36 h = 1,5 d (36 geteilt durch 24 = 1,5) 2,1 h = 126 min (2,1 mal 60 = 126)

Umrechnung mit Überspringen einer Einheit

10800 s = 3 h (10800 geteilt durch 3600 = 3) 4,5 h = 16200 min (4,5 mal 3600)

250 min ≈ 0,1736 d (250 geteilt durch 1440) 7,6 d = 10944 min (7,6 mal 1440)

Merke:

Beim Umrechnen von einer kleineren in eine größere Einheit wird mit dem Umrechnungsfaktor dividiert.

Beim Umrechnen von einer größeren in eine kleinere Einheit wird mit dem Umrechnungsfaktor multipliziert.

Wird eine Einheit übersprungen, so müssen zwei Umrechnungsfaktoren verwendet werden.

2.4. Stufe 4: Definition der Sekunde

Die Festlegung der Einheit „Sekunde“ ist eine etwas komplizierte Sache.

Ursprünglich orientierten sich die Menschen an der Länge eines Tages. Die Sekunde war der achtundsechzigtausendvierhundertste Teil des Tages. Astronomen und Physiker stellten aber gemeinsam fest, dass die Tageslänge geringe Schwankungen hat und allmählich größer wird. Vor mehreren hundert Millionen Jahren hatte das Jahr eine Länge von etwa vierhundert Tagen, die Tageslänge war also deutlich kürzer.

Auch die Verwendung des Erdumlaufs um die Sonne (das Jahr) oder die Mondbewegung um die Erde halfen nicht, die notwendige Genauigkeit zu erreichen.

Erst mit der weiteren Entwicklung der Atomphysik gelang eine sehr genaue Festlegung der Sekunde:

"Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung."

Siehe Physikalisch – Technische Bundesanstalt, Cs bedeutet Caesium

2.5. Stufe 5: Was ist Zeit?

Im Alltag verwenden wir Uhren und Kalender, um die Zeit zu messen und unser Leben zu organisieren. Die Zeit ist eng mit unserem Bewusstsein und unserer Wahrnehmung verbunden, da sie uns hilft, Veränderungen und Entwicklungen in unserer Umgebung zu verstehen und zu verarbeiten.

Wir können beobachten, dass ein Glas, das von einem Tisch auf den Boden zerfällt, in viele Stücke zerspringt. Der umgekehrte Vorgang ist zwar theoretisch denkbar, aber äußerst unwahrscheinlich.

Der Grund dafür liegt im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik:

In einem abgeschlossenen System nimmt die Entropie im Laufe der Zeit zu oder bleibt konstant, sie kann jedoch niemals abnehmen.

Alle natürlichen Prozesse sind irreversibel (nicht umkehrbar). Zum Beispiel vermischen sich zwei Gase von allein so lange, bis ein Gleichgewichtszustand erreicht ist. Um die Gase wieder zu entmischen, müssen von außen Energie und Arbeit aufgewendet werden. Dadurch wird die Richtung der Zeit vorgegeben.

Nach der Speziellen Relativitätstheorie gibt es keine Uhr, welche die Zeit für das gesamte Universum vorgibt. Alle Systeme haben ihre Eigenzeit. Demzufolge beschreibt die Physik immer die Veränderungen in dieser Eigenzeit und wie sich die Eigenzeiten mehrerer Systeme oder Vorgänge zueinander verhalten.

In der Physik ist es bisher nicht gelungen, eine Verbindung zwischen der Quantentheorie und der Allgemeinen Relativitätstheorie herzustellen. Die Stringtheorie und die Quantenschleifengravitation konnten noch nicht experimentell überprüft werden. Supersymmetrische Teilchen, eine Vorhersage der Stringtheorie, wurden in den Beschleunigeranlagen nicht nachgewiesen. Die wahre Natur von Raum und Zeit ist uns also immer noch unbekannt.

3. Mechanische Bewegungen

3.1. Stufe 1: Bewegungen und Bezugskörper

Aus physikalischer Sicht ist die Bewegung von Körpern eine der grundlegenden Eigenschaften der Natur, die alle Bereiche des Universums beeinflusst. Die Bewegung ist untrennbar mit der Kraft verbunden. Sie beschreibt die Veränderung der Position eines Körpers in Raum und Zeit und wird durch die Geschwindigkeit, Beschleunigung und Energie charakterisiert.

Durch eine Bewegung verändert ein Körper seine Lage gegenüber einem anderen Körper, der Bezugskörper genannt wird.

Körper	Möglicher Bezugskörper
Ein Reisender läuft durch den fahrenden ICE.	ICE
Ein ICE fährt.	Gleis
Ein PKW überholt auf der Autobahn einen LKW.	LKW

Dann gilt auch: Ein Körper befindet sich in Ruhe, wenn er seine Lage gegenüber dem Bezugskörper nicht ändert.

Körper	Möglicher Bezugskörper
Ein Reisender sitzt im fahrenden ICE auf seinem Platz.	ICE
Zwei PKW fahren auf einer Autobahn gleich schnell nebeneinander.	PKW

Bezüglich verschiedener Bezugskörper gibt es verschiedene Geschwindigkeiten:

- Der Reisende bewegt sich gegenüber dem ICE mit 3 km/h in Fahrtrichtung. Gegenüber dem Bahndamm sind es 123 km/h.
- Der Reisende bewegt sich gegenüber dem ICE mit 3 km/h entgegen der Fahrtrichtung. Gegenüber dem Bahndamm sind es 117 km/h.
- Zwei LKW bewegen sich bezüglich der Autobahn nebeneinander mit jeweils 100 km/h. Beide LKW sind relativ zueinander in Ruhe.

Wir unterscheiden drei Bewegungsformen:

Bewegung	Kennzeichen	Beispiel
Geradlinige Bewegung	Ein Körper bewegt sich auf einer geraden Linie.	Ein Zug fährt auf einer geraden Strecke.
Kreisbewegung	Ein Körper bewegt sich auf einem Kreis.	Ein Satellit umkreist die Erde.
Schwingung	Ein Körper bewegt sich zwischen zwei Punkten hin und her.	Ein Kind auf einer Schaukel.

Beispiel

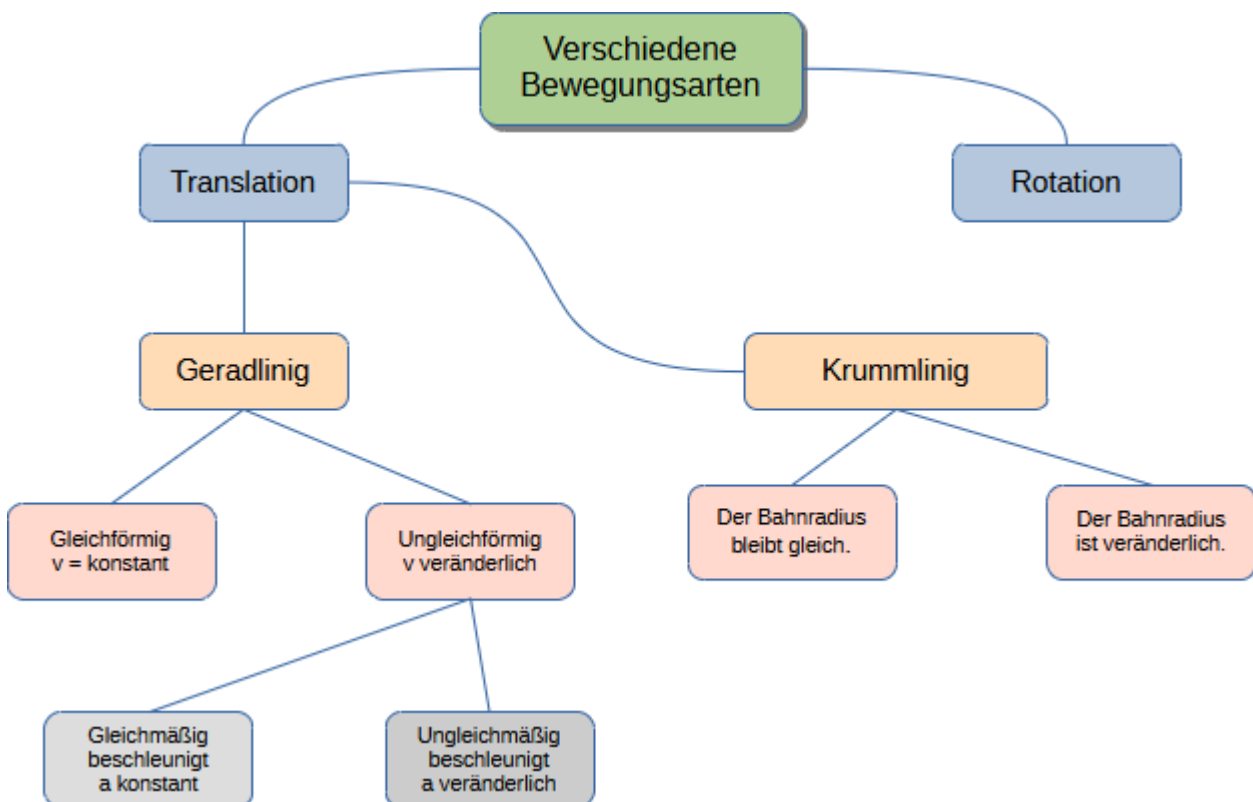
Eine Person (Bezeichnung A) beobachtet von einer Steilküste aus drei Schiffe. Schiff B fährt von West nach Ost mit 12 kn. Schiff C fährt von West nach Ost mit 8 kn. Schiff D fährt von Ost nach West mit 5 kn. Alle vier Bezugssysteme sind physikalisch gleichberechtigt.

Welche Geschwindigkeiten haben Sie in verschiedenen Bezugssystemen?

Bezugssystem	v_A	v_B	v_C	v_D
A	0 kn	12 kn	8 kn	5 kn
B	12 kn	0 kn	4 kn (12 - 8)	17 kn (12 + 5)
C	8 kn	4 kn (12 - 8)	0 kn	13 kn (8 + 5)
D	5 kn	17 kn (12 + 5)	13 kn (8 + 5)	0 kn

3.2. Stufe 2: Bewegungsarten

Bewegungen können unterschieden werden nach der Form der Bahnkurve und nach der Änderung der Geschwindigkeit.



Eine **Translation** ist eine Bewegung eines Körpers entlang einer geraden Linie, bei der sich alle Punkte des Körpers in die gleiche Richtung und mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen.

Bei einer **Rotation** bewegen sich alle Punkte des Körpers auf Kreisbahnen um die Drehachse.

3.3. Stufe 3: Wichtige Bewegungsformen

	Bewegungsform		Geschwindigkeit	
			Betrag	Richtung
Allgemeiner Fall	Krummlinige Bewegung	ungleichförmig	ändert sich	ändert sich
Sonderfälle	Geradlinige Bewegung	gleichförmig	konstant	konstant
		gleichmäßig beschleunigt	ändert sich gleichmäßig	konstant
	Kreisbewegung	gleichförmig	konstant	ändert sich periodisch
		gleichmäßig beschleunigt	ändert sich gleichmäßig	ändert sich
	Schwingung		ändert sich periodisch	ändert sich periodisch

3.4. Stufe 4: Inertialsysteme

Im Beispiel mit den vier Bezugssystemen aus der Stufe 1 wird davon ausgegangen, dass alle Systeme für die Beschreibung der Bewegungen gleichberechtigt sind.

In der Physik werden sie als Inertialsysteme bezeichnet.

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper (d. h. ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken) entweder in Ruhe befindet oder sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie bewegt.

Wir nehmen also an, dass sich die drei Schiffe absolut geradlinig und gleichförmig bewegen. Kleine Abweichungen davon, wie sie in der Realität auftreten, können wir hier vernachlässigen.

Alle Inertialsysteme sind bei der Beschreibung der physikalischen Vorgänge gleichberechtigt. Es spielt keine Rolle, ob du dich in der Position A befindest oder auf dem Schiff B, C oder D.

In der speziellen Relativitätstheorie spielen Inertialsysteme eine zentrale Rolle. Das Relativitätsprinzip besagt, dass alle physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben. Dies führt zu einigen überraschenden Konsequenzen, wie der Zeitdilatation und der Längenkontraktion.

Bezugssysteme, die beschleunigt werden oder sich auf gekrümmten Bahnen bewegen, sind keine Inertialsysteme. In solchen Systemen treten sogenannte Trägheitskräfte auf, die keine realen physikalischen Kräfte sind, sondern lediglich auf die Beschleunigung des Bezugssystems zurückzuführen sind. Ein Beispiel hierfür wäre ein Karussell oder ein Auto, das eine Kurve fährt.

4. Die Geschwindigkeit

4.1. Stufe 1: Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung

Umgangssprachlich beschreibt die Geschwindigkeit, wie schnell oder wie langsam sich ein Körper bewegt. Wir beziehen uns dabei auf unsere Alltagserfahrung. Ein Fußgänger bewegt sich langsam, ein PKW auf der Autobahn schnell und ein Flugzeug sehr schnell. Wenn wir öffentliche Verkehrsmittel benutzen wollen, interessiert uns weniger die Geschwindigkeit der Fahrzeuge. Vielmehr kommt es darauf an, welche Zeit wir insgesamt mit Umsteigen für die ganze Strecke benötigen.

Die Geschwindigkeit gibt an, welchen Weg ein Körper in welcher Zeit zurücklegt.

Um Berechnungen der Geschwindigkeit durchführen zu können, weisen wir allen physikalischen Größen Symbole zu. Es sind praktische Abkürzungen. Dadurch werden die Gleichungen in der Physik sehr kurz und übersichtlich und jeder Mensch auf der gesamten Welt versteht sie.

Größe	Symbol	Name des Symbols	Einheit
Weg	s	spatium	Meter (m)
Zeit	t	tempus	Sekunde (s)
Geschwindigkeit	v	velocitas	Meter je Sekunde (m/s)

Im einfachsten Fall der geradlinig gleichförmigen Bewegung (Rolltreppe oder Förderband) lässt sich die Geschwindigkeit als Quotient von Weg und Zeit berechnen:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \text{ oder } v = \frac{s}{t}.$$

Jede physikalische Größe hat einen Wert. Wir sprechen z. Bsp. von 3 kg, 7 m oder 60 s. Dieser Wert setzt sich aus dem Zahlenwert und der Einheit zusammen. Die Grundeinheiten der Physik sind Kilogramm (kg), Meter (m) und Sekunde (s).

Die Einheit der Geschwindigkeit wird aus den Einheiten des Weges und der Zeit mithilfe obiger Gleichung abgeleitet.

Ist nur die Einheit der physikalischen Größe von Bedeutung, so wird das Symbol der Größe in eckigen Klammern geschrieben.

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Die Einheitenzeichen werden nicht kursiv geschrieben. Die Einheit der Geschwindigkeit ist eine abgeleitete Einheit.

Im alltäglichen Leben wird die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ angegeben.

Es gilt die folgende Umrechnung:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{1\text{m}}{3,6\text{s}} \approx 0,278 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ oder } 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

4.2. Stufe 2: Die Durchschnittsgeschwindigkeit

Für eine Fahrt mit dem PKW von Berlin nach München zeigt eine digitale Karte für die Strecke von 585 km eine Fahrzeit von 6 Stunden und 7 Minuten an. Auf diesem Weg kommt es häufig dazu, dass nicht mit der zulässigen Höchstgeschwindigkeit gefahren werden kann. Das kann zum Beispiel an einem hohen Verkehrsaufkommen und Baustellen liegen. Dadurch wird die Fahrzeit verlängert.

Im Durchschnitt erreicht das Fahrzeug etwa eine Geschwindigkeit von:

$$\frac{585 \text{ km}}{6 \text{ h}} \approx 97,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

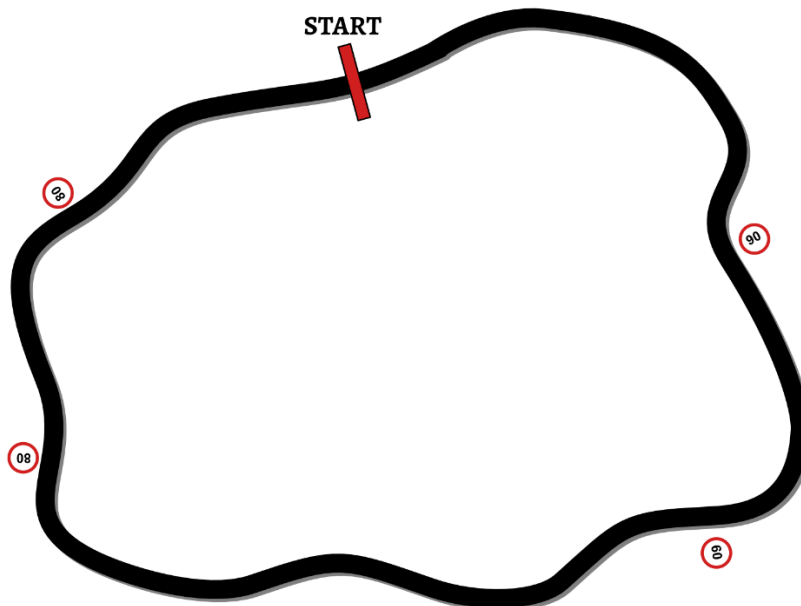
Dieser Wert wird die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ genannt.

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** ist der Quotient aus dem gesamten zurückgelegten Weg und der dazu benötigten Zeit.

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{gesamter Weg}}{\text{gesamte Zeit}} \text{ oder } \bar{v} = \frac{s_{\text{ges}}}{t_{\text{ges}}}$$

Beachte: Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist kein mathematischer Durchschnitt mehrerer Geschwindigkeitswerte.

Betrachten wir die folgende 3 km lange Rennstrecke. Sie hat mehrere Geschwindigkeitsbeschränkungen. Nach dem Durchfahren der Kurven sind diese automatisch aufgehoben. Die Geschwindigkeiten zwischen den Kurven kennen wir nicht.



Es ist nicht möglich, aus diesen Angaben die Durchschnittsgeschwindigkeit zu ermitteln.

Nehmen wir an, Fahrer 1 benötigt für die 3 km 2 min und Fahrer 2 nur 1,5 min.

$$\text{Fahrer 1 fährt mit } \bar{v} = \frac{3000 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ und Fahrer 2 mit } \bar{v} = \frac{3000 \text{ m}}{90 \text{ s}} = 33,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

4.3. Stufe 3: Die Geschwindigkeit verändert sich gleichmäßig - Beschleunigung

Die Bewegung der meisten Körper in unserer Umgebung ist nicht gleichmäßig. Das bedeutet, dass sich entweder die Geschwindigkeit, die Richtung oder beides gleichzeitig ändern. Solche Bewegungen werden als ungleichförmig bezeichnet.

Wenn ein Flugzeug startet, vergrößert sich seine Geschwindigkeit, eventuell sogar gleichmäßig. Ab dem Abheben ändert das Flugzeug auch seine Richtung, es steigt auf. Wie schnell das Flugzeug seine Geschwindigkeit vergrößern kann, hängt von vielen Faktoren ab: Triebwerksleistung, Flugzeuggewicht, Luftwiderstand, Windverhältnisse, Runway-Bedingungen, Umgebungstemperatur.

Nehmen wir die folgenden Werte an:

Zeit	v in m/s	v in km/h
10	28	100,8
20	56	201,6
25	70	252

Aus diesen Werten können wir erkennen, dass sich die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 2,8 m/s vergrößert: $2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}}$. Im Nenner können wir die Sekunden multiplizieren: $2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Der Wert $2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wird Beschleunigung des Flugzeugs genannt.

Die **Beschleunigung a** gibt an, um wieviel Meter je Sekunde sich die Geschwindigkeit eines Körpers in jeder Sekunde seiner Bewegung vergrößert oder verkleinert.

Für die physikalische Größe Beschleunigung ist festgelegt:

Physikalische Größe: Beschleunigung			
Formelzeichen	Name	Einheit	Kurzzeichen
a	acceleration	Meter je Quadratsekunde	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oder $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Ist der Wert der Beschleunigung immer gleich, so wird die Bewegung gleichmäßig beschleunigt genannt. Bei einer Vergrößerung der Geschwindigkeit wird die Beschleunigung positiv gezählt, bei einer Verkleinerung negativ.

Die Bremsbeschleunigung oder Verzögerung eines PKW kann stark variieren, abhängig von mehreren Faktoren wie Straßenbedingungen, Reifenzustand, Bremsentyp oder Fahrzeuggewicht. Unter idealen Bedingungen, auf trockener und ebener Fahrbahn, kann ein durchschnittlicher PKW eine Bremsverzögerung von etwa -4 bis -7 m/s² erreichen. Die Geschwindigkeit verkleinert sich je Sekunde um 4 bis 7 m/s oder um 14 bis 25 km/h. Bei schlechten Straßenverhältnissen (nass, eisig) kann diese Verzögerung deutlich geringer sein, der Bremsweg wird dadurch länger. Das Antiblockiersystem (ABS) ist nicht vorrangig dafür entwickelt worden, den Bremsweg zu verkürzen, sondern die Lenkbarkeit des Fahrzeugs während des Bremsvorgangs zu erhalten.

4.4. Stufe 4: Die Geschwindigkeit verändert sich gleichmäßig

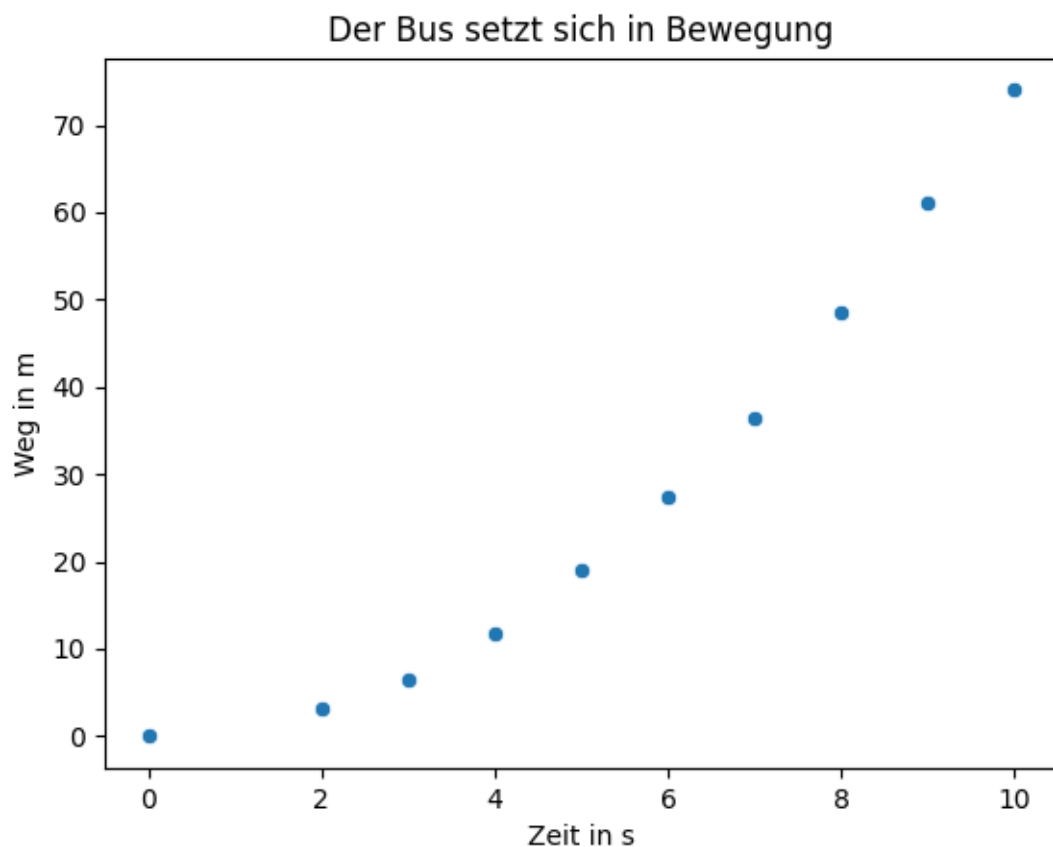
Wenn ein Linienbus durch eine Stadt fährt, ändern sich ständig seine Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wir können nur sagen, dass seine Bewegung ungleichförmig ist und dass der Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auf eine bestimmte Art und Weise von der Zeit abhängig sind. Für die Fahrgäste ist wichtig, dass der Busfahrer den Fahrplan einhält und weitgehend „sanft“ fährt.

Physiker sind daran interessiert, wie der genaue Zusammenhang der Größen Zeit, Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung formuliert werden kann.

Eine Möglichkeit wäre, während der Fahrt den Weg in Abhängigkeit von der Zeit zu messen. Wir könnten auch den Fahrtenschreiber auslesen, sofern der Bus einen hat. In jedem Fall ergeben sich Messwertepaare.

Zeit in s	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weg in m	0	3,2	6,5	11,7	19	27,5	36,4	48,5	61	74

Das s – t – Diagramm für den anfahrenen Bus:

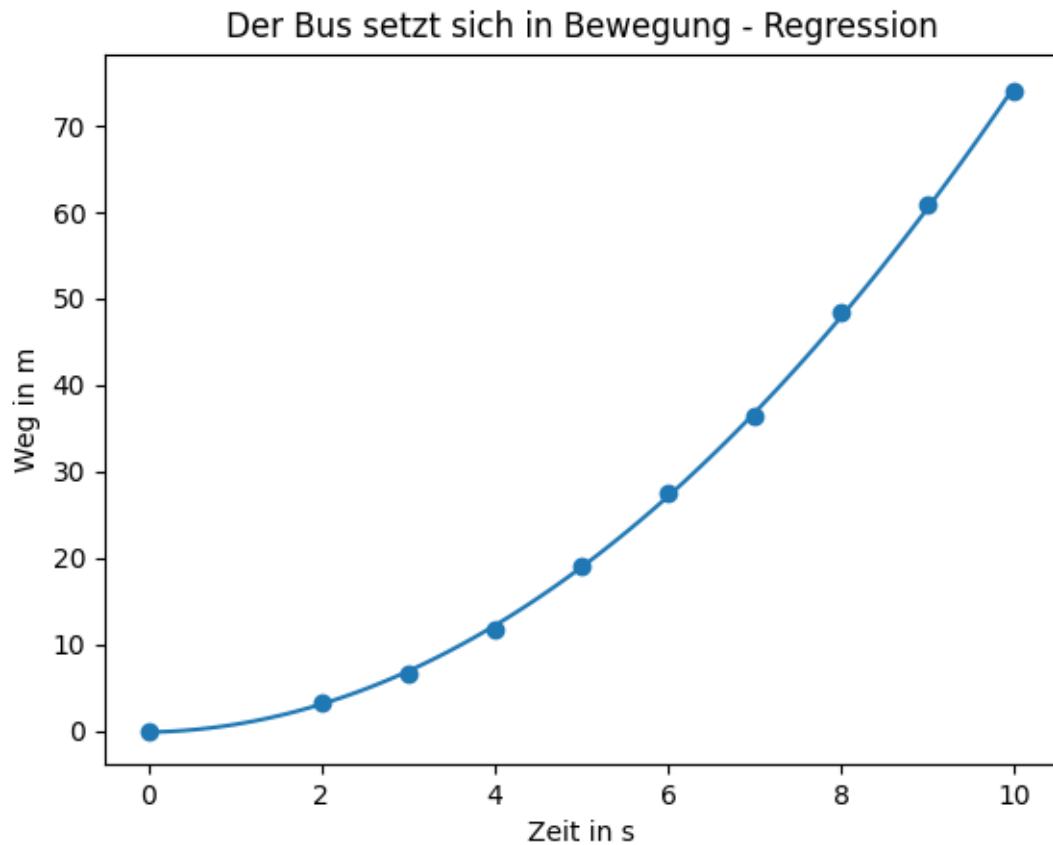


Von 2 bis 4 s vergrößert sich der zurückgelegte Weg des Busses um 8,5 m, von 4 bis 6 s um 15,8 m oder von 8 bis 10 s um 25,5 m.

Wir können erkennen, dass der zurückgelegte Weg in gleichen Zeitabständen immer größer wird. Hier liegt also eine beschleunigte Bewegung vor.

Die mathematische Auswertung dieser Messwerte kann mithilfe einer quadratischen Regression erfolgen.

Das zugehörige Python-Programm ist in Stufe 5 angegeben.

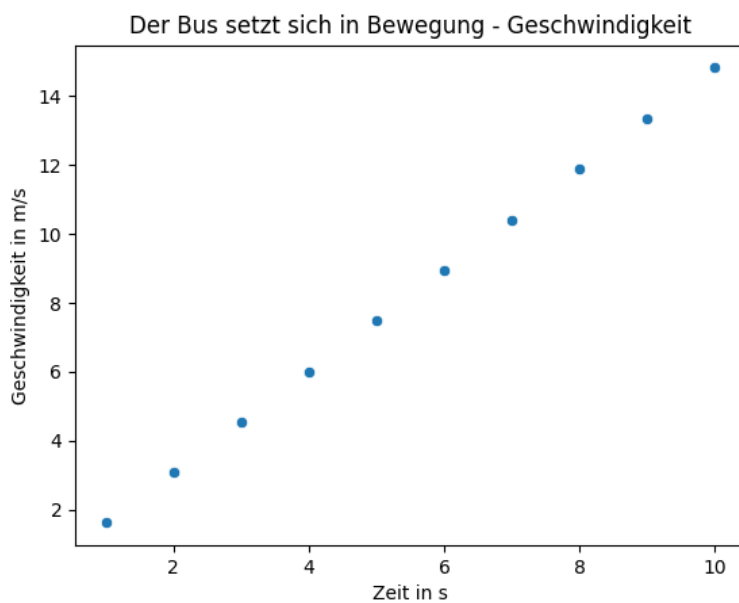


Die ermittelte Gleichung lautet: $s(t) = 0,7323 t^2 + 0,1556 t - 0,8115$.

Es handelt sich um eine mit mathematischen Verfahren ermittelte Gleichung, welche die Lage der Messpunkte bestmöglich beschreibt.

Die erste Ableitung von $s(t)$ ist die Geschwindigkeitsfunktion: $v(t) = s'(t) = 1,4646 t + 0,1556$.

Damit ergibt sich das $v - t$ - Diagramm:



4.5. Stufe 5: Das zugehörige Python – Programm

Die Messwerte aus der [Tabelle](#) auf S. 20 werden in der Datei „bus.csv“ gespeichert und dann ausgelesen.

Das v – t – Diagramm lässt sich auch mit der Datei „v_bus.csv“ erstellen oder direkt plotten.

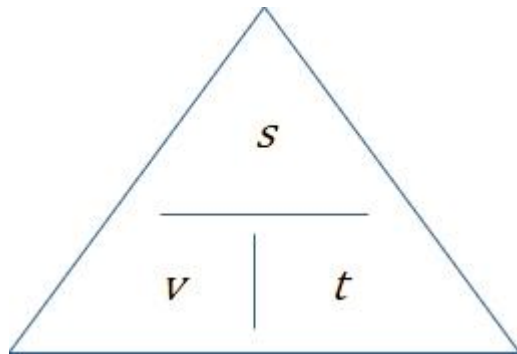
```
#bus fährt an, weg und zeit
# importieren
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from sklearn.metrics import r2_score
import scipy.stats as stats
#daten einlesen
dataset = pd.read_csv('bus.csv')
# diagramm zeichnen
sns.scatterplot(data=dataset, x='zeit', y='weg')
plt.title('Der Bus setzt sich in Bewegung')
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Weg in m')
plt.show()
# regression zweiten grades
model = np.poly1d(np.polyfit(dataset['zeit'], dataset['weg'], 2))
# zeichnen der regression
polyline = np.linspace(0, 10, 100)
plt.title('Der Bus setzt sich in Bewegung - Regression')
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Weg in m')
plt.scatter(dataset['zeit'], dataset['weg'])
plt.plot(polyline, model(polyline))
plt.show()
print(model)
# werte ausgeben
print(r2_score(dataset['weg'], model(dataset['zeit'])))
```

```
#bus fährt an, weg und zeit
# importieren
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
#daten einlesen
dataset = pd.read_csv('v_bus.csv')
# diagramm zeichnen
sns.scatterplot(data=dataset, x='zeit', y='v')
plt.title('Der Bus setzt sich in Bewegung - Geschwindigkeit')
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Geschwindigkeit in m/s')
plt.show()
```

5. Der Zusammenhang von Weg, Zeit und Geschwindigkeit

5.1. Stufe 1: Der einfachste Fall

Wenn es um eine geradlinige gleichförmige Bewegung handelt, gibt es die folgende Merkhilfe:



Es ergeben sich aus diesem Dreieck die drei folgenden Gleichungen:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Beispiele:

1. Ein Motorrad fährt mit 100 km/h. Welchen Weg legt es in 12 s zurück?

Die Geschwindigkeit von 100 km/h muss auf m/s umgerechnet werden: $100 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 3,6 \approx 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der Weg s ist gleich $s = v \cdot t = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12 \text{ s} \approx 333 \text{ m}$.

2. Ein Zug legt eine Strecke von 1,5 km in 50 s zurück. Welche Geschwindigkeit besitzt er?

Die Strecke wird umgerechnet: 1,5 km = 1500 m.

Die Geschwindigkeit berechnet sich nach $v = \frac{s}{t} = \frac{1500}{50} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3. Ein PKW fährt mit 50 km/h durch eine Stadt. Wie lange braucht er für 50 m?

Zuerst wird die Geschwindigkeit umgerechnet: $50 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 3,6 \approx 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Für die benötigte Zeit gilt dann: $t = \frac{50}{13,9} \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 3,6 \text{ s}$.

Konsequent wurden hier die Einheiten $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und s benutzt. Es ist ratsam, diese Arbeitsweise beizubehalten.

Auf keinen Fall dürfen Einheiten gemischt werden. Wer die Geschwindigkeit nicht umrechnet, erhält ein falsches Ergebnis.

5.2. Stufe 2: Die Beschleunigung kommt dazu

Im einfachsten Fall ruht ein Körper und wird durch eine Krafteinwirkung während einer geradlinigen Bewegung gleichmäßig schneller, also beschleunigt:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{dafür benötigte Zeit}} \text{ oder } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ mit } \Delta v \text{ in m und } \Delta t \text{ in s.}$$

Das Symbol Δ (delta) ist die Kurzschreibweise für die Differenz zweier Werte, Endwert minus Anfangswert.

Geschwindigkeitsänderung = Endwert (v_2 oder v_E) minus Anfangswert der Geschwindigkeit (v_1 oder v_A)

Δt ist die mit einer Uhr gemessene Zeit.

Beispiel:

$$v_2 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \text{ Die gemessene Zeit beträgt } 10 \text{ s. Dann folgt } a = \frac{7 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Wenn wir die beiden Geschwindigkeiten vertauschen, so ist $v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_1 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

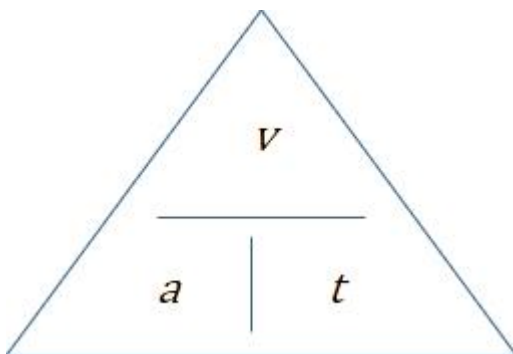
$$\text{Eine erneute Berechnung ergibt dann } a = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = \frac{-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Das ist eine negative Beschleunigung, also ein Bremsvorgang.

Wird ein Körper schneller, so ist seine Beschleunigung positiv.

Wird ein Körper langsamer, so ist seine Beschleunigung negativ.

Auch hier können wir wie bei der Geschwindigkeit mit einem Dreieck arbeiten:



Es ergeben sich aus diesem Dreieck die drei folgenden Gleichungen:

$$a = \frac{v}{t}$$

$$v = a \cdot t$$

$$t = \frac{v}{a}$$

Beispiele:

1. Ein Motorrad beschleunigt in 8 s auf 100 km/h. Wie groß ist die Beschleunigung?

$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 3,6 \approx 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}, a = \frac{v}{t} = \frac{27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8 \text{ s}} \approx 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2. Ein PKW beschleunigt 10 s lang mit $1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welche Geschwindigkeit erreicht er?

$$\text{Die Geschwindigkeit berechnet sich nach } v = a \cdot t = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 64,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

3. Ein PKW fährt mit 50 km/h durch eine Stadt. Wie lange braucht er für 50 m?

$$\text{Zuerst wird die Geschwindigkeit umgerechnet: } 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 3,6 \approx 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Für die benötigte Zeit gilt dann: $t = \frac{50}{13,9} \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 3,6 \text{ s}$.

Bleibt noch die Frage zu klären, welcher Weg während dieser beschleunigten Bewegung zurückgelegt wird.

Wenn der Körper am Anfang in Ruhe ist und seine Geschwindigkeit gleichmäßig anwächst, so müssen wir anstelle von $s = v \cdot t$ eine andere Gleichung verwenden. Am Anfang ist der Körper langsamer als in seinem letzten Bewegungsabschnitt. Deshalb verwenden wir statt v nur den Durchschnitt $\frac{1}{2}v$. Die genaue Erklärung dafür erfolgt später mithilfe der Diagramme.

Die neue Gleichung lautet $s = \frac{1}{2}v \cdot t$. Hier können wir den während der Beschleunigung zurückgelegten Weg mit der erreichten Endgeschwindigkeit und der dafür benötigten Zeit berechnen.

Beispiel:

Wenn das Motorrad in 8 s von 0 auf 100 km/h beschleunigt, so ist $s \approx \frac{1}{2} \cdot 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \text{ s} \approx 111 \text{ m}$.

Der zurückgelegte Weg lässt sich auch mit der Beschleunigung berechnen. Dazu beachten wir, dass $v = a \cdot t$ gilt.

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Beispiel

Wenn $a = \frac{v}{t} = \frac{27,78}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt, dann ist $s = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8^2 \text{ s}^2 \approx 111 \text{ m}$.

Die Ergebnisse stimmen über ein und der Ansatz $s = \frac{1}{2}v \cdot t$ erweist sich als richtig.

Die folgende Tabelle enthält die umgestellten Gleichungen:

Grundgleichung $s = \frac{1}{2}v \cdot t$	umgestellt nach v	$v = \frac{2s}{t}$
	umgestellt nach t	$t = \frac{2s}{v}$
Grundgleichung $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	umgestellt nach a	$a = \frac{2s}{t^2}$
	umgestellt nach t	$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$
Verbindung beider Grundgleichungen	v mit a ohne t	$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$

5.3. Stufe 3: Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

Wenn ein Körper bereits eine Geschwindigkeit hat und weiter beschleunigt wird, müssen wir unsere Gleichungen abwandeln.

Die Geschwindigkeit, die ein Körper bei Beginn der Untersuchung seiner Bewegung bereits hatte, wird **Anfangsgeschwindigkeit v_0 (sprich v Null)** genannt.

Aus $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ wird $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, weil der Körper sich unabhängig von einer weiteren Beschleunigung bereits mit v_0 bewegt.

Aus $v = a \cdot t$ wird entsprechend $v = v_0 + a \cdot t$.

Aus $s = \frac{1}{2} v \cdot t$ wird $s = \frac{1}{2} (v_0 + v) \cdot t$. Außerdem gilt $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

Beispiele

1. Ein PKW passiert eine Baustelle mit 60 km/h und wird danach auf 120 km/h mit $a = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beschleunigt. Wie lange dauert dieser Vorgang? Welcher Weg wird dabei zurückgelegt?

$$\frac{120}{3,6} \approx 33,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \frac{60}{3,6} \approx 16,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}, t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{16,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 11,1 \text{ s}, s = \frac{33,33^2 - 16,66^2}{2 \cdot 1,5} \text{ m} \approx 278 \text{ m}.$$

2. Ein Fahrradfahrer bewegt sich mit seinem Fahrrad mit $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Er bremst (a ist negativ) mit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welche Geschwindigkeit hat er nach 2 s?

$$v = v_0 + a \cdot t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Welchen Weg legt er dabei zurück?

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2^2 \text{ s}^2 = 6 \text{ m}$$

5.4. Stufe 4: Bewegung und höhere Mathematik

Ausgehend von einer beliebigen Funktion des Weges $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit ist die Funktion der Geschwindigkeit die erste Ableitung der Wegfunktion:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Das ist die physikalische Schreibweise einer Ableitung, mathematisch wäre es $v(t) = s'(t)$.

Die Funktion der Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$$

Dann ist die Beschleunigungsfunktion die zweite Ableitung der Wegfunktion: $a(t) = \ddot{s}(t)$.

Beispiel

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 44 \text{ m}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wenn wir uns hier von konkreten Werten lösen, gilt allgemein:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_0$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

Hierbei handelt es sich um eine geradlinige und gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Ausgehend von der Beschleunigung gelten umgekehrt:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a dt$$

$$\int dv = \int a dt$$

$$v(t) = \int a dt = a \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (a \cdot t + v_0) dt = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

v_0 und s_0 sind die auftretenden Integrationskonstanten, die sich mit der Bedingung $t_1 = 0$ ergeben.

Beispiel

Die Wegfunktion eines Körpers lautet: $s(t) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 8\text{m}$.

Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach 4 s?

Die Geschwindigkeitsfunktion lautet $v(t) = \frac{ds}{dt} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v(4\text{s}) = -7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der Körper bewegt sich nach 4 s in negativer Richtung.

Wann hat der Körper die Geschwindigkeit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

$$v(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow t = 2\text{s}$$

Beispiel

Die Wegfunktion eines Körpers lautet: $s(t) = 3t^3 - 18t + 6$.

Der Weg s wird in Meter und die Zeit t in Sekunden gemessen.

Die Geschwindigkeitsfunktion lautet: $v(t) = \frac{ds}{dt} = 9t^2 - 18$.

Wann ist die Geschwindigkeit des Körpers $v = 0$?

$$0 = 9t^2 - 18 \rightarrow t = \pm\sqrt{2}\text{s}$$

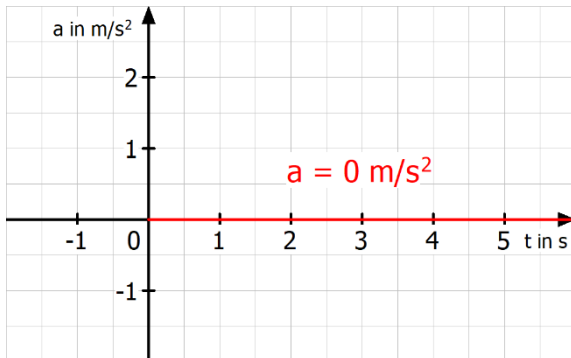
Die Beschleunigungsfunktion lautet: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 18t$.

Mit wachsender Zeit nimmt die Beschleunigung des Körpers gleichmäßig zu.

6. Diagramme

6.1. Stufe 1: Diagramme der geradlinig gleichförmigen Bewegung

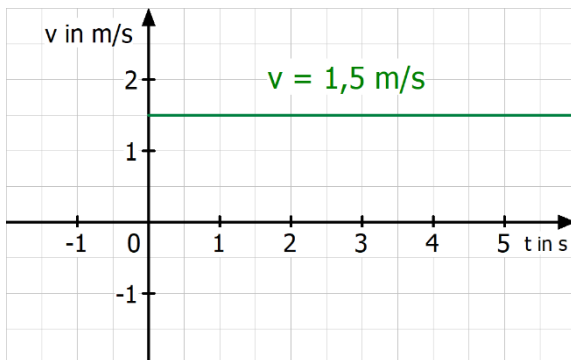
In der Physik müssen die Achsen umbenannt werden. Die x – Achse wird in vielen Fällen zur t – Achse (Zeitachse). Die y – Achse wird einer abhängigen Größe zugeordnet. Die Einheiten der physikalischen Größen müssen auf beiden Achsen angegeben werden.



Es tritt keine Beschleunigung auf.

Der Körper wird nicht schneller oder langsamer.

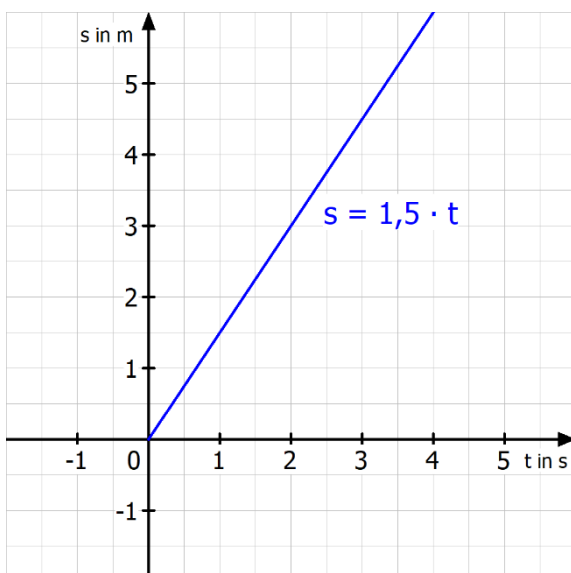
Die Gerade liegt genau auf der t – Achse.



Die Geschwindigkeit bleibt gleich (oder konstant).

$v(t)$ ist parallel zur t – Achse.

Der Abstand zur t -Achse entspricht dem Geschwindigkeitswert.



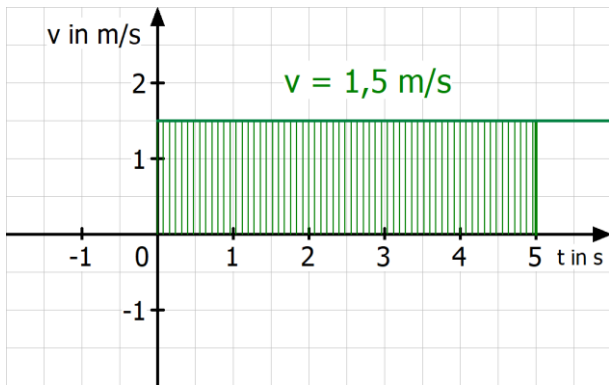
In gleichen Zeiten werden gleich lange Wege zurückgelegt.

Weg und Zeit sind zueinander proportional: $s \sim t$.

Der Proportionalitätsfaktor ist die Geschwindigkeit.

Es ergibt sich eine Ursprungsgerade.

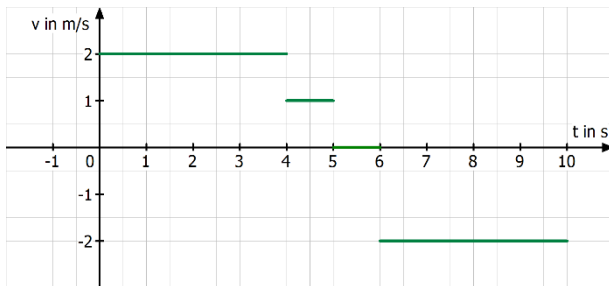
Der Anstieg ist die Geschwindigkeit.



Der vom Körper zurückgelegte Weg kann mit $s = v \cdot t$ berechnet werden.

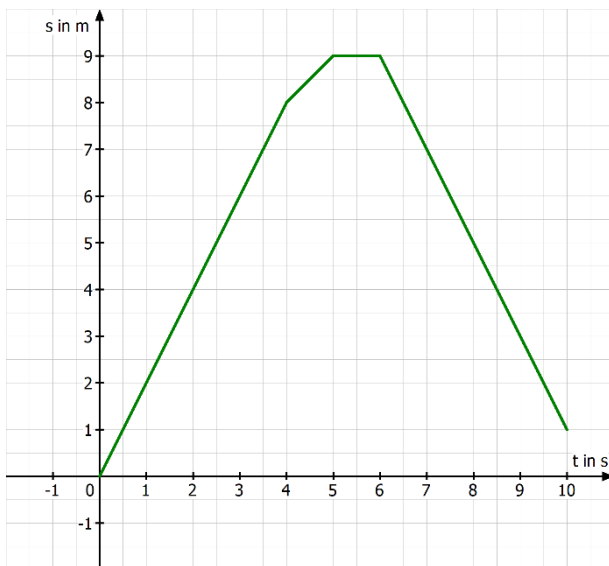
Deshalb ist der zurückgelegte Weg für die ersten 5 Sekunden gleich dem Flächeninhalt des links eingezeichneten Rechtecks.

$$s = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 7,5 \text{ m}$$



Betrachten wir noch den Fall, dass ein Körper während seiner Bewegung mehrere unterschiedliche Geschwindigkeiten besitzt.

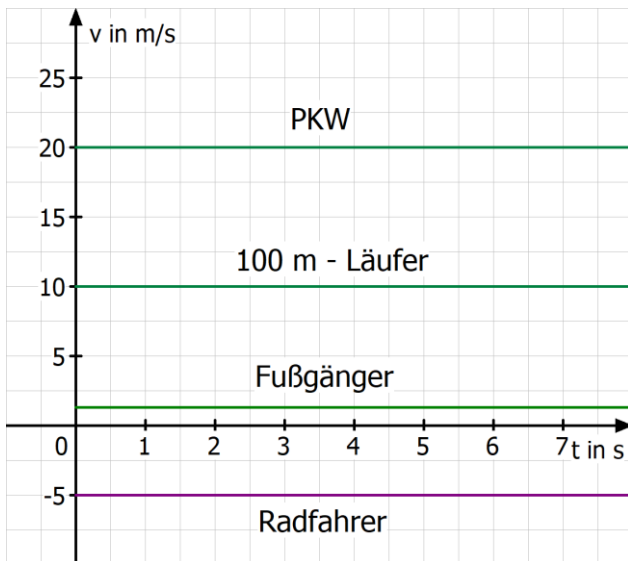
Im linken Bild sind vier Werte für die Geschwindigkeit zu erkennen: $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Körper ist von 4 bis 5 s in Ruhe und bewegt sich dann wieder zurück.



Am zugehörigen $s - t$ – Diagramm können wir erkennen, dass dieser Körper seinen Startpunkt nicht wieder erreicht und 1 m davor zur Ruhe kommt.

6.2. Stufe 2: Erweiterung der Diagramme aus Stufe 1

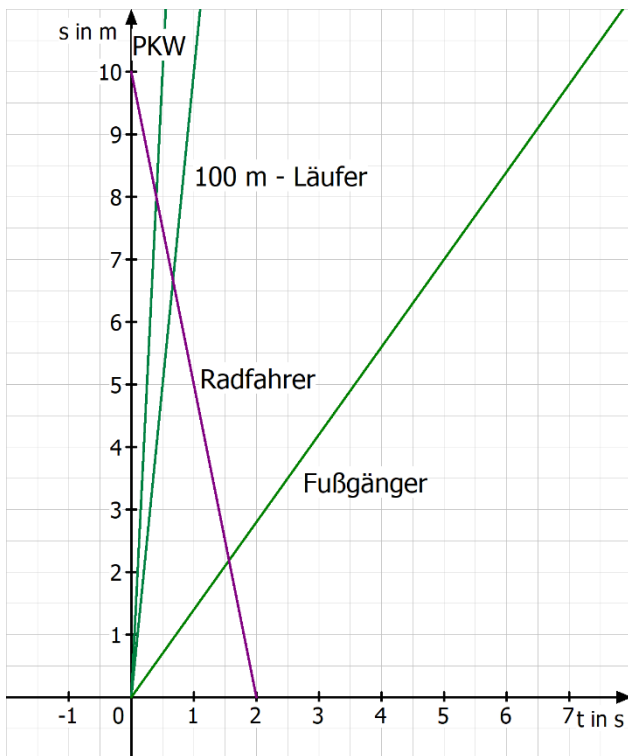
Wir betrachten hier mehrere Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten.



Hier sehen wir vier verschiedene Körper mit vier verschiedenen Geschwindigkeiten.

PKW, 100 m – Läufer und Fahrradfahrer bewegen sich vom Startpunkt aus in ein und dieselbe Richtung.

Der Radfahrer hat eine negative Geschwindigkeit und bewegt sich zu den anderen drei Körpern in die entgegengesetzte Richtung.



PKW, Radfahrer und 100 m – Läufer starten in einem Punkt. Die Geraden für den PKW und den 100 m – Läufer verlaufen sehr steil, weil ihre Geschwindigkeiten groß sind.

Der Radfahrer starte an einem anderen Ort, 10 m von ihnen entfernt.

Er bewegt sich den anderen Körpern entgegen. Dort, wo die Linie des Radfahrers die Linien der anderen Körper schneidet, kann man ablesen, wann und wo sie sich begegnen.

Nach 2 Sekunden erreicht der Radfahrer den Startpunkt der anderen drei Körper.

Wir können auch eine einfache Berechnung durchführen.

Beispiel Radfahrer und Fußgänger

$$s_R = s_F$$

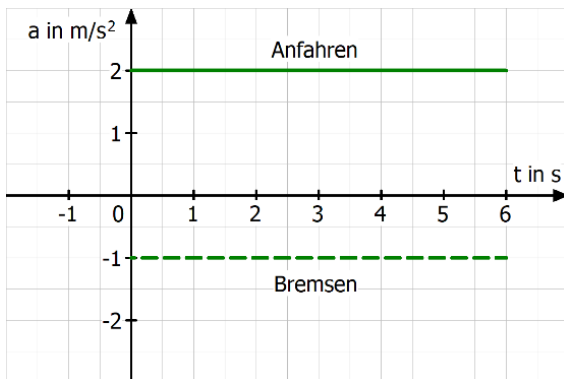
$$-5 \cdot t + 10 = 1,4 \cdot t$$

$$10 = 6,4 \cdot t$$

$$t \approx 1,56 \text{ s}$$

Radfahrer und Fußgänger begegnen sich nach etwa 1,6 s und 2,2 m vom Startpunkt entfernt.

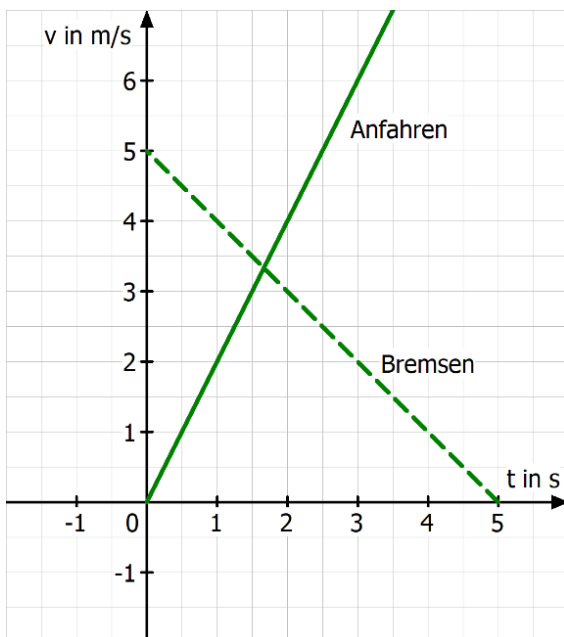
6.3. Stufe 3: Diagramme der gleichmäßig beschleunigten Bewegung



Betrachten wir gleichzeitig das Anfahren und das Abbremsen.

Das Anfahren wird durch eine konstante Beschleunigung mit dem Wert $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ dargestellt. Die Beschleunigung ist positiv.

Das Abbremsen wird durch eine konstante Beschleunigung mit dem Wert $a = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ dargestellt. Die Beschleunigung ist negativ.

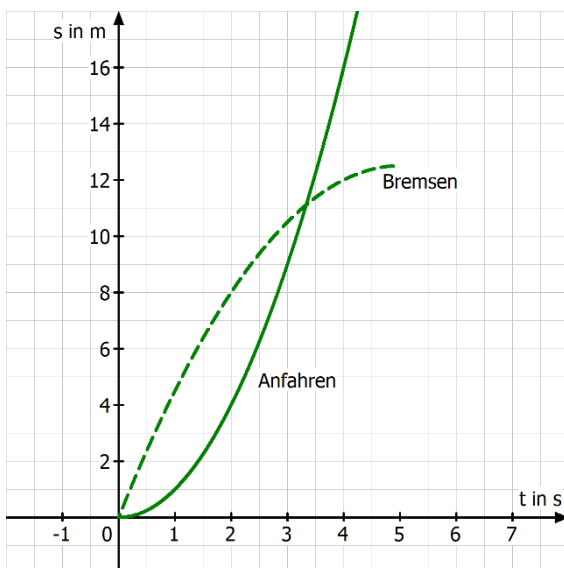


Für den anfahrenden Körper erhöht sich die Geschwindigkeit gleichmäßig um $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ je s.

Es gilt: $v = a \cdot t = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$. Der Anstieg ist positiv.

Für den abbremsenden Körper verkleinert sich die Geschwindigkeit gleichmäßig um $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ je s.

Es gilt: $v = v_0 + a \cdot t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$. Der Anstieg ist negativ.



Der beim Anfahren zurückgelegte Weg wächst proportional zum Quadrat der Zeit an.

Es gilt: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2 = t^2$.

Der beim Abbremsen zurückgelegte Weg wird mit der Gleichung

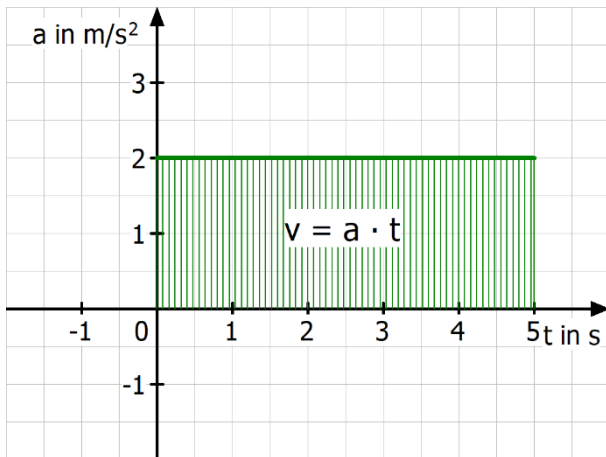
$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = -\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} t^2 + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

berechnet.

Der Bremsvorgang ist nach 5 s abgeschlossen.

Der Bremsweg beträgt 12,5 m.

6.4. Stufe 4: Bedeutung der Flächen in den Diagrammen

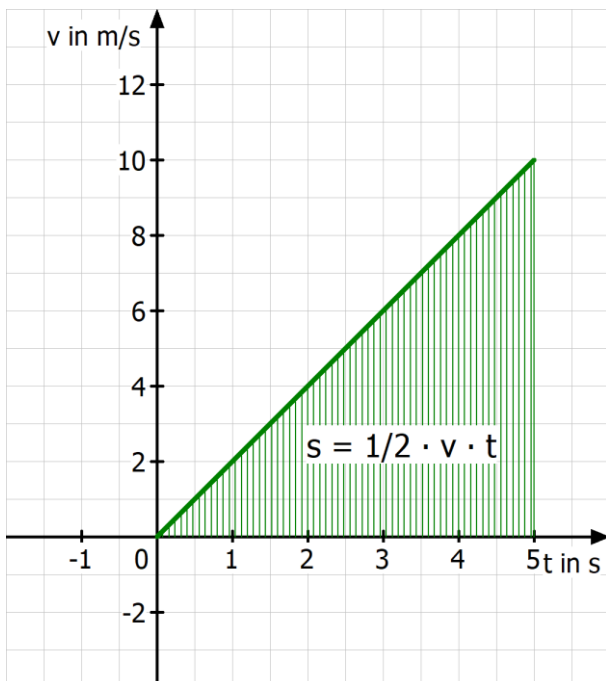


Bei einer konstanten Beschleunigung ergibt sich im $a - t$ – Diagramm eine Parallele zur t – Achse.

Die eine Seite des Rechtecks ist die festgelegte Zeit, hier 5 s.

Die andere Seite des Rechtecks ist die Beschleunigung, hier $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich der nach 5 s erreichten Geschwindigkeit: $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ s} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Diesen Wert können wir auch bei $t = 5 \text{ s}$ im Diagramm für die Geschwindigkeit ablesen.

Der in 5 s zurückgelegte Weg ergibt sich durch den Inhalt der Fläche unter der Geschwindigkeitsfunktion.

Eine Kathete ist die Zeit mit dem Wert 5 s.

Die andere Kathete ist die Geschwindigkeit mit $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Es gilt: $s = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 25 \text{ m}$.

Dieser Wert ergibt sich auch mit:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}$$

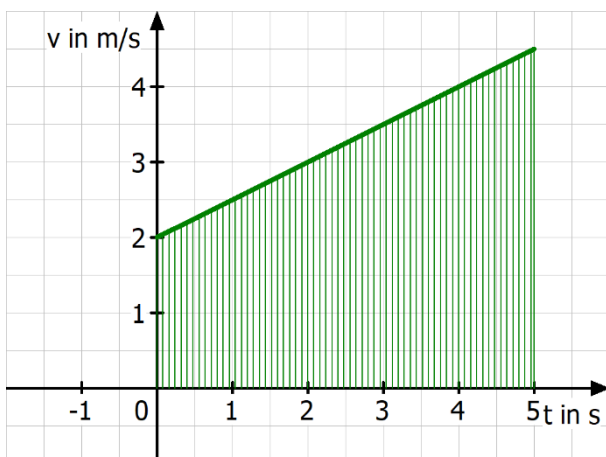
Wenn der Körper bereits eine Geschwindigkeit hatte, hier $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, und dann weiter beschleunigt wird, ergibt sich eine andere Rechnung.

Wir können uns hier ein Trapez vorstellen, wenn wir das Blatt um 90° nach rechts drehen.

Es gilt dann: $s = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 5 \text{ s} = 16,25 \text{ m}$.

Das Trapez kann auch in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt werden.

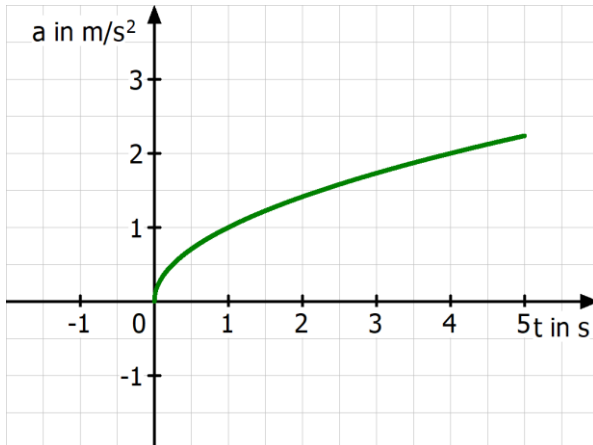
$$s = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 16,25 \text{ m}$$



Allgemein ist $s = v_0 \cdot t \pm \frac{a}{2} \cdot t^2$. Das Zeichen „+“ steht für eine Geschwindigkeitszunahme und das Minuszeichen für eine Geschwindigkeitsabnahme. Für $a = 0$ ist $s = v_0 \cdot t$. Das ist die Gleichung für die gleichförmige Bewegung.

6.5. Stufe 5: Der allgemeine Fall

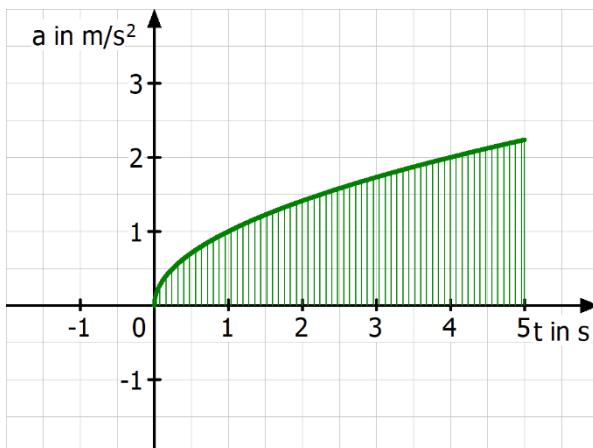
In diesem letzten Fall soll die Beschleunigung nicht gleich sein, sondern zunehmen.



Für die links dargestellte Funktion gilt die Gleichung:

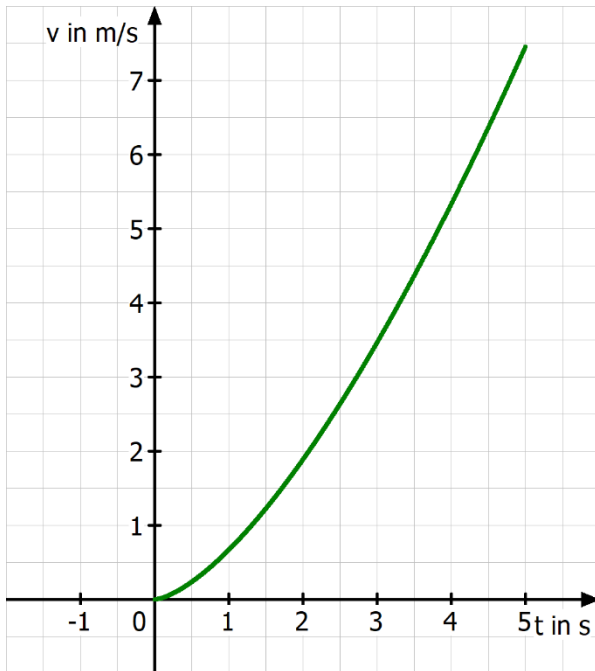
$$a(t) = \sqrt{t}$$

Die Beschleunigung des Körpers wird ungleichmäßig größer.



Die Fläche unter dieser Funktion entspricht der nach 5 s erreichten Geschwindigkeit.

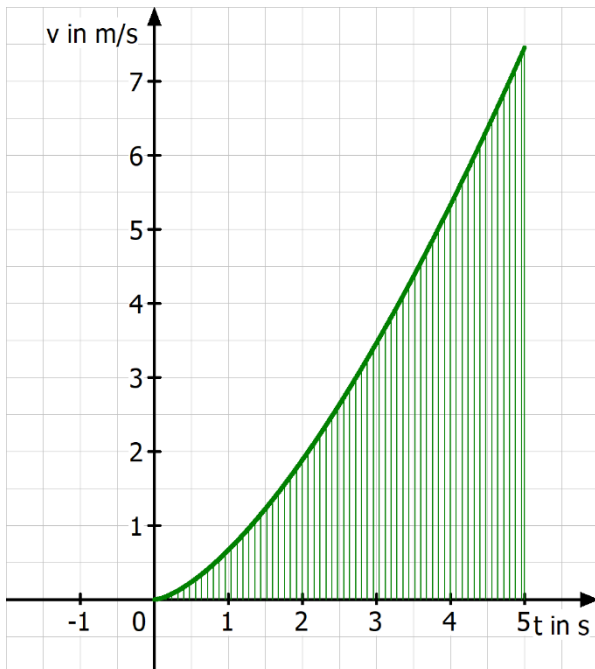
$$v(5) = \int_0^5 \sqrt{t} dt = \frac{10}{3} \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Die Geschwindigkeitsfunktion ergibt sich durch die Integration der Beschleunigungsfunktion:

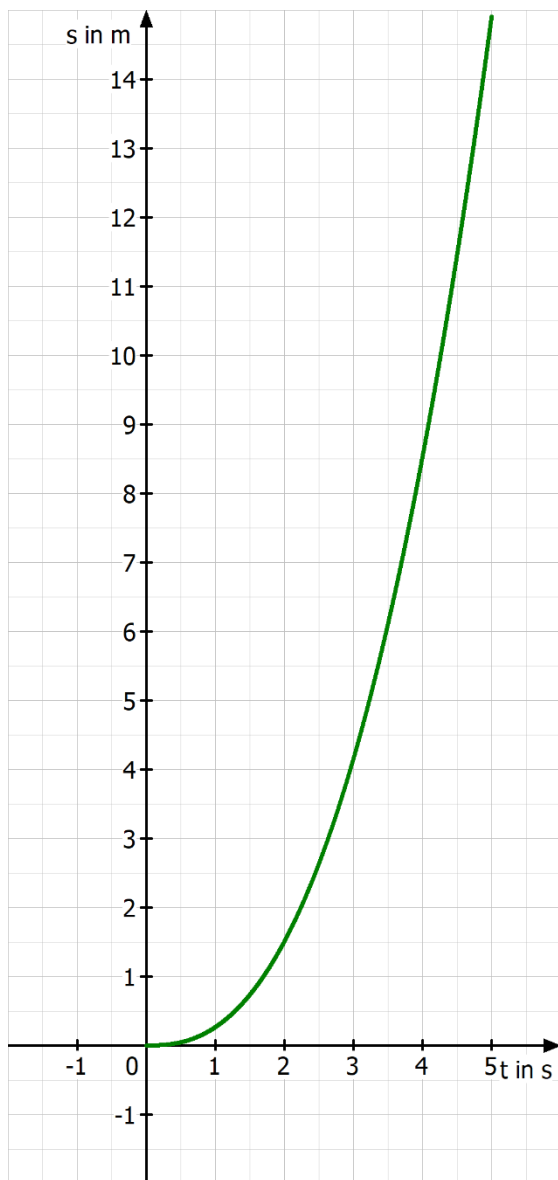
$$v(t) = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c$$

Die Konstante c ist physikalisch eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Hier gilt $v_0 = 0$.



Die Fläche unter der Funktion der Geschwindigkeit von 0 bis 5 s ergibt den während der Beschleunigung zurückgelegten Weg.

$$s(5) = \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 \frac{2}{3} \sqrt{t^3} dt = \frac{20}{3} \sqrt{5} \text{ m} \approx 14,9 \text{ m}$$



Die Wegfunktion ergibt sich als Integral der Geschwindigkeitsfunktion:

$$s(t) = \int \frac{2}{3} \sqrt{t^3} dt = \frac{4t^{5/2}}{15} + c$$

Die Konstante c wäre der Anfangsweg s_0 . Hier gilt $s_0 = 0$.

Sind vor dem Einsetzen der Beschleunigung $a(t) = \sqrt{t}$ bereits eine Geschwindigkeit und ein zurückgelegter Weg vorhanden, so gilt:

$$s(t) = \frac{4t^{5/2}}{15} + v_0 \cdot t + s_0$$

Wir können den Exponenten auch als Wurzel schreiben:

$$s(t) = \frac{4\sqrt{t^5}}{15} + v_0 \cdot t + s_0$$

6.6. Stufe 6: Eine Reise zum Stern Wega

Der Stern Wega (Alpha Lyrae) ist der fünfhellste Stern an unserem Nachthimmel und der Hauptstern des Sternbildes Leier (Lyra). Wega bildet zusammen mit den Sternen Deneb (Sternbild Schwan) und Altair (Sternbild Adler) das leicht erkennbare Sommerdreieck am Nachthimmel des Sommers.

Wega ist etwa 25 Lichtjahre (ly) von uns entfernt. Wenn wir die Wega am Nachthimmel betrachten, ist es nicht der Stern, wie er jetzt aussieht, sondern wie er vor 25 Jahren ausgesehen hat.

Stellen wir uns eine Reise mit einem Raumschiff zur Wega vor. Unser Raumschiff müsste wegen der großen Entfernung fast mit Lichtgeschwindigkeit fliegen können.

Dazu muss unser Raumschiff beschleunigt werden. Als Beschleunigung verwenden wir $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Entfernung zur Wega beträgt $d = 25 \text{ Lichtjahre} = 25 \cdot 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m} \approx 2,36518 \cdot 10^{17} \text{ m}$.

Die geplante Reisegeschwindigkeit soll $299000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 299.000.000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ betragen.

Die Beschleunigungszeit beträgt dann $t = \frac{299.000.000 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 3,04791 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 352,767 \text{ d}$, also fast ein Jahr.

Diese Zeit wird auch für das Abbremsen benötigt!

Während des Beschleunigens und Abbremsens legt das Raumschiff die folgende Strecke zurück:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3,04791 \cdot 10^7 \text{ s})^2 \approx 4,55663 \cdot 10^{15} \text{ m} \approx 0,48 \text{ ly}$$

Dann bleiben noch 24 ly für den Flug mit konstanter Geschwindigkeit.

Von der Erde aus gesehen dauert der Flug fast 26 Jahre.

Im Raumschiff verläuft die Zeit wegen der Gesetze der speziellen Relativitätstheorie anders:

$$t_R = t_E \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 24 \cdot \sqrt{1 - \frac{299000000^2}{299792458^2}} \approx 1,74$$

Für die Raumschiffbesatzung dauert der Flug insgesamt 3,6 Jahre plus viermal Zeit für das Beschleunigen plus Aufenthaltsdauer im System der Wega.

Wenn die Raumfahrer erfolgreich zurückkehren, werden ihre ehemaligen Gefährten uralt sein oder nicht mehr leben.

7. Vektoren

7.1. Stufe 1: Grundlagen

Es gibt verschiedene Arten physikalischer Größen, solche, die nur einen Zahlenwert haben, und solche, die einen Zahlenwert und eine Richtung haben.

Physikalische Größen mit einem Zahlenwert (Betrag) werden Skalare (Einzahl: Skalar) genannt.

Beispiele für Skalare sind die Temperatur, die Masse, die Energie, der Druck, die Ladung, das Körpergewicht, der Blutdruck, die Konzentration eines Stoffes, die Herzfrequenz oder die Wachstumsrate einer Population.

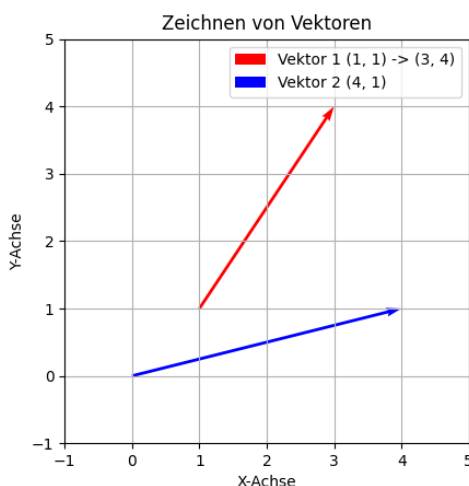
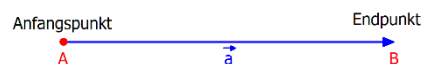
Physikalische Größen mit einem Zahlenwert (Betrag) und einer Richtung werden Vektoren (Einzahl: Vektor) genannt.

Beispiele für Vektoren sind die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft, der Impuls, die Wachstumsrichtung einer Pflanze, die Migration von Tieren, der Blutfluss oder der Infektionsvektor.

Skalare haben als Bezeichnung nur ein Symbol wie m oder E oder p .

Vektoren werden mit einem Pfeil über dem Symbol gekennzeichnet wie bei $\vec{v}$ oder $\vec{a}$ oder $\vec{F}$. Der Pfeil zeigt immer nach rechts. Der Betrag des Vektors wird mit zwei senkrechten Strichen $|\vec{v}|$ gekennzeichnet.

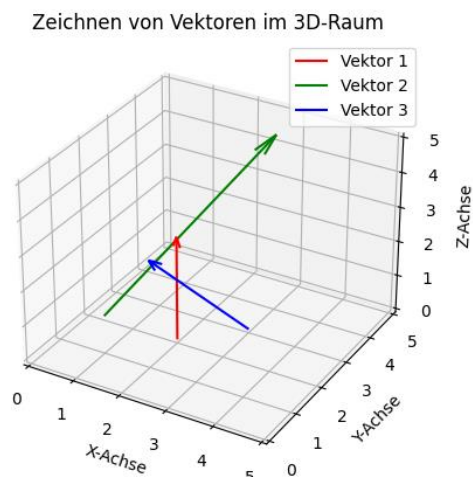
Ein Vektor kann zeichnerisch dargestellt werden:



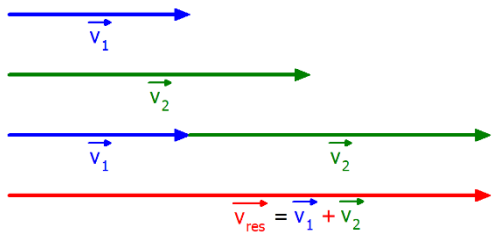
Hier sind zwei Vektoren in einem Koordinatensystem dargestellt.

Wenn es sich um zwei Geschwindigkeitsvektoren handelt, könnten wir Vektor 1 mit $\vec{v}_1$ und Vektor 2 mit $\vec{v}_2$ bezeichnen.

Vektoren könne auch räumlich gezeichnet werden.



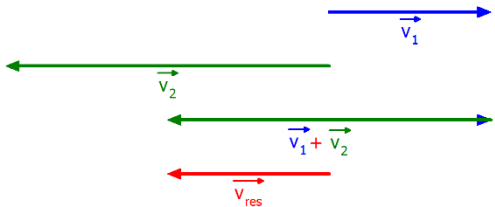
7.2. Stufe 2: Addition von parallelen Vektoren



Wir können uns vorstellen, dass $\vec{v}_1$ der Vektor der Windgeschwindigkeit ist und $\vec{v}_2$ der Vektor der Geschwindigkeit eines Radfahrers. Der Radfahrer hat Rückenwind und kann dadurch schneller werden. Die Geschwindigkeiten addieren sich. Vektoren werden zeichnerisch aneinandergesetzt. Die Abkürzung „res“ steht für das Wort „resultierend“.

Es lassen sich auch einfache Berechnungen durchführen. Wir benutzen für den Radfahrer $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für den Wind $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ als Geschwindigkeiten. Dann ist $|\vec{v}_{res}| = |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Geschwindigkeit des Radfahrers vergrößert sich durch den Rückenwind.

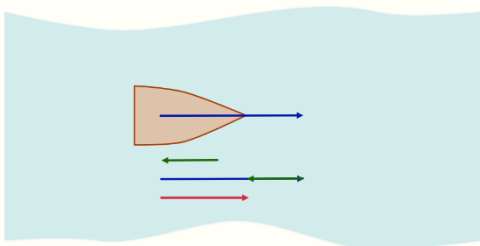


Hier herrscht für den Radfahrer Gegenwind. Die Vektoren werden wieder aneinandergesetzt, allerdings mit verschiedenen Richtungen. Die resultierende Geschwindigkeit ist die Differenz beider Vektoren.

Es lassen sich auch einfache Berechnungen durchführen. Wir benutzen für den Radfahrer $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für den Wind $-5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ als Geschwindigkeiten. Dann ist $|\vec{v}_{res}| = |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| = -5 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

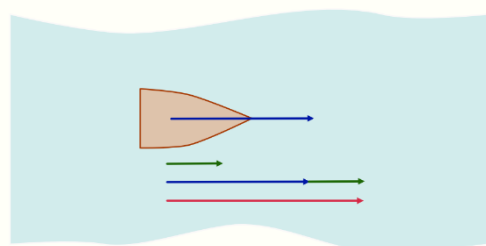
Die Geschwindigkeit des Radfahrers verkleinert sich durch den Gegenwind.

Die vorherigen Überlegungen können wir auf ein Boot auf einem Fluss übertragen.



Im linken Bild fährt das Boot gegen die Strömung.

Die Geschwindigkeit des Bootes verkleinert sich.

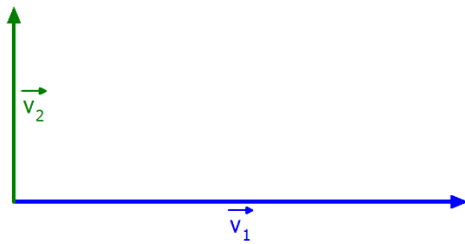


Hier fährt das Boot mit der Strömung des Flusses.

Die Geschwindigkeit des Bootes vergrößert sich.

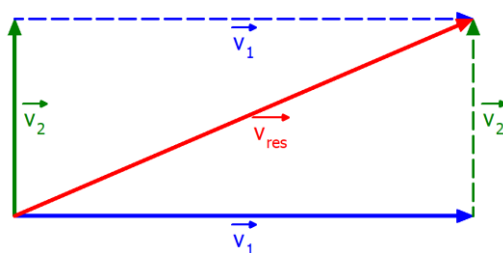
7.3. Stufe 3: Addition von senkrechten Vektoren

Der einfachste Fall sind zueinander senkrechte Vektoren.



Hier sind die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ gegeben.

Sie sind zueinander senkrecht oder orthogonal.



im nächsten Schritt ergänzen wir die beiden Vektoren zu einem Rechteck.

Die Diagonale des Rechtecks ist der resultierende Vektor.

Nehmen wir an, dass die Beträge der Vektoren $|\vec{v}_1| = 4$ und $|\vec{v}_2| = 3$ sind.

Die Berechnung von $|\vec{v}_{res}|$ kann mit dem Satz des Pythagoras erfolgen, weil $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zueinander senkrecht sind.

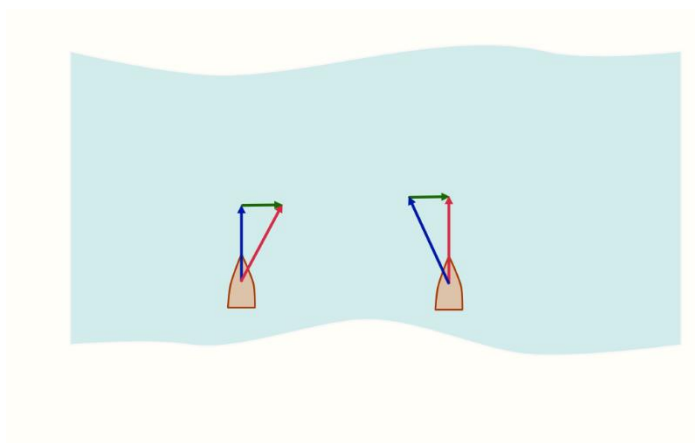
$$|\vec{v}_{res}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_{res}$ kann mit dem Tangens berechnet werden.

$$\tan \alpha(\vec{v}_{res}, \vec{v}_1) = \frac{3}{4}$$

Daraus folgt ein Winkel von rund 37° .

Durch eine maßstabsgerechte Zeichnung kann der Winkel auch gemessen werden. Ein möglicher Maßstab wäre hier z. Bsp. 1 cm entspricht 1 m/s.



Links ist zu sehen: Wenn das Boot geradeaus (blauer Pfeil) fährt, wird es durch die Strömung (grüner Pfeil) nach links gedrückt (roter Pfeil).

Rechts ist zu sehen: Wenn das Boot geradeaus fahren soll (roter Pfeil), muss es gegen die Strömung (grüner Pfeil) gesteuert werden (blauer Pfeil).

Beispiel

In einem Fluss mit einer Breite von $b = 80 \text{ m}$ fließt das Wasser mit der Geschwindigkeit $v_w = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

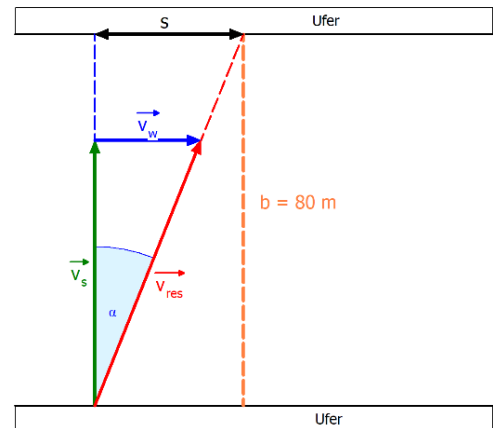
Eine Fähre bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_s = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ von einem Ufer zum anderen.

Um welche Strecke s wird die Fähre dadurch abgetrieben?

Das Dreieck mit den drei Vektoren $\vec{v}_s$, $\vec{v}_w$ und $\vec{v}_{res}$ ist rechtwinklig. Demzufolge ist

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{|\vec{v}_w|}{|\vec{v}_s|} = 0,4 \text{ und } \alpha \approx 21,8^\circ.$$

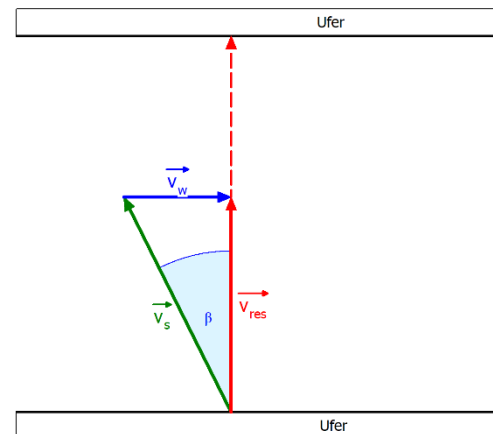
Die Abdrift s ist $\tan \alpha = \frac{s}{b}$ gleich $s = 0,4 \cdot 80 \text{ m} = 32 \text{ m}$.



Unter welchem Winkel muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, um das andere Ufer auf kürzestem Weg zu erreichen?

Das Dreieck der Vektoren ist wieder rechtwinklig, allerdings an einer anderen Stelle.

$$\sin \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{|\vec{v}_w|}{|\vec{v}_s|} = 0,4 \text{ und } \alpha \approx 23,6^\circ.$$



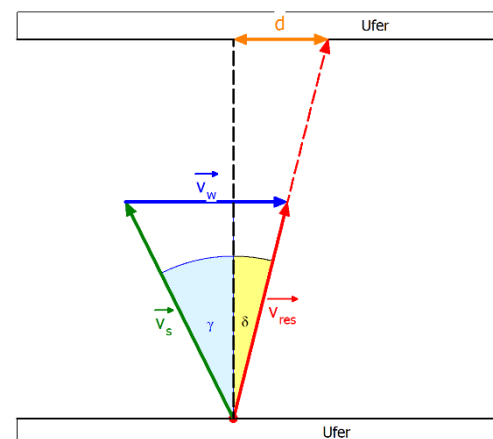
Wie muss die Fähre gesteuert werden, um einen beliebigen Punkt am anderen Ufer zu erreichen?

Die Abdrift ist die Strecke d , b ist die Flussbreite.

$$\tan \delta = \frac{d}{b}$$

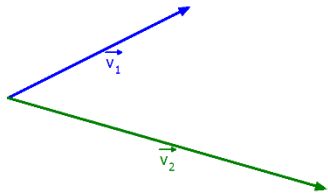
Und weiter mit dem Sinussatz

$$\frac{|\vec{v}_s|}{|\vec{v}_w|} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(\gamma + \delta)} = \frac{\cos \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

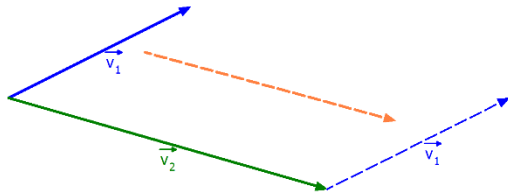


Wenn d und b bekannt sind, lässt sich daraus der Winkel γ , unter dem gegengesteuert werden muss, berechnen.

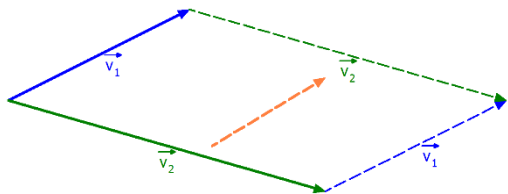
7.4. Stufe 4: Addition von beliebigen Vektoren



Es sind zwei beliebige Vektoren gegeben.

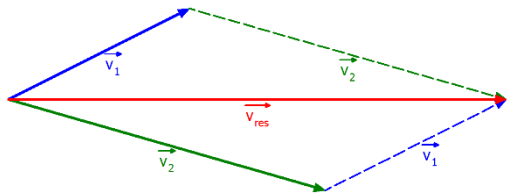


Zuerst wird der Vektor $\vec{v}_1$ parallel zu sich selbst bis an die Spitze des Vektors $\vec{v}_2$ verschoben.



Dann wird der Vektor $\vec{v}_2$ parallel zu sich selbst bis an die Spitze des Vektors $\vec{v}_1$ verschoben.

Es entsteht ein Parallelogramm.



Die Diagonale dieses Parallelogramms ist der resultierende Vektor $\vec{v}_{res} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Hier ist erkennbar, dass die Addition von Vektoren anders als die Addition von Zahlen durchgeführt wird.

Nehmen wir für das Berechnungsbeispiel folgendes an: $|\vec{v}_1| = 3$, $|\vec{v}_2| = 4$, $\alpha = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 60^\circ$.

Mit Anwendung des Kosinussatzes erhalten wir:

$$|\vec{v}_{res}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2 \cdot |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha}$$

$$|\vec{v}_{res}| = \sqrt{|3|^2 + |4|^2 - 2 \cdot |3| \cdot |4| \cdot \cos 60^\circ} \approx 3,6$$

Durch Nutzung des Sinussatzes lässt sich der Winkel β zwischen $\vec{v}_{res}$ und $\vec{v}_2$ berechnen:

$$\frac{|\vec{v}_{res}|}{\sin 120^\circ} = \frac{|\vec{v}_1|}{\sin \beta}$$

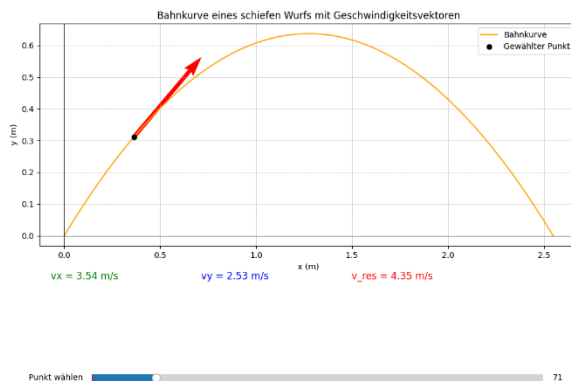
Es gilt $\sin \beta = \frac{\sin 120^\circ \cdot 3}{3,6} \approx 0,72$. Damit gilt $\beta \approx 46,2^\circ$.

7.5. Stufe 5: Zerlegung einer resultierenden Geschwindigkeit

Es ist auch möglich, einen resultierenden Vektor in die beiden Vektoren zu zerlegen, die ihn bilden.

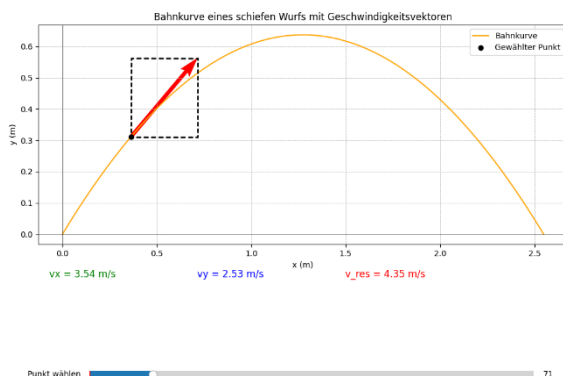
Dazu betrachten wir den schiefen (oder schrägen) Wurf. Betrachten wir als Beispiel einen schräg geworfenen Ball. Beim Abwurf erhält der Ball eine waagerechte (horizontale) Geschwindigkeit, mit der er sich vorwärtsbewegt. Diese Geschwindigkeit bleibt fast gleich. Durch den Luftwiderstand des Balls verkleinert sie sich etwas. Gleichzeitig fliegt der Ball bis zum höchsten Punkt seiner Bahn nach oben. Er hat demzufolge auch eine senkrechte (vertikale) Geschwindigkeit.

Die horizontale Geschwindigkeit und die vertikale Geschwindigkeit werden Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit genannt.



Wir sehen hier die Bahnkurve eines schiefen Wurfs. Ausgewählt wurde ein beliebiger Punkt (schwarz markiert) auf der Kurve.

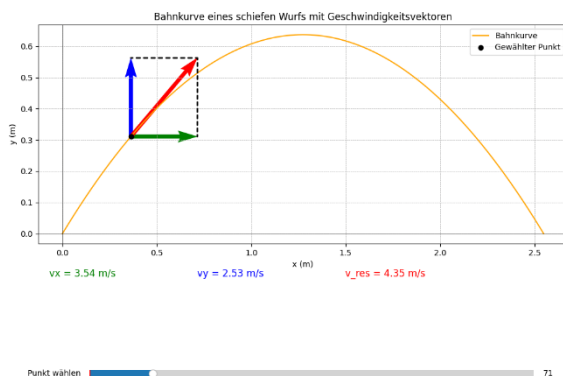
Eingezeichnet ist der zu diesem Punkt gehörende Geschwindigkeitsvektor (rot).



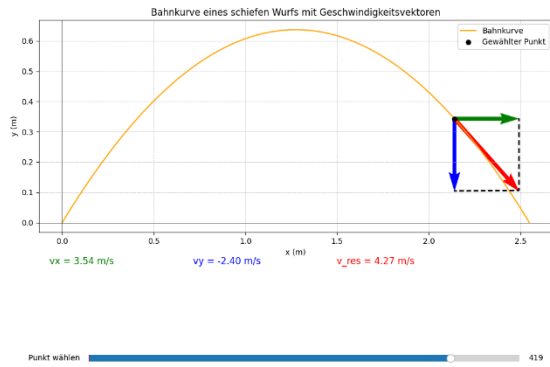
Parallel zu den Koordinatenachsen werden Rechteckseiten eingezeichnet.

Die linke untere Ecke des Rechtecks ist der auf der Kurve gewählte Punkt.

Die rechte obere Ecke des Rechtecks ist das Ende des roten Pfeils.

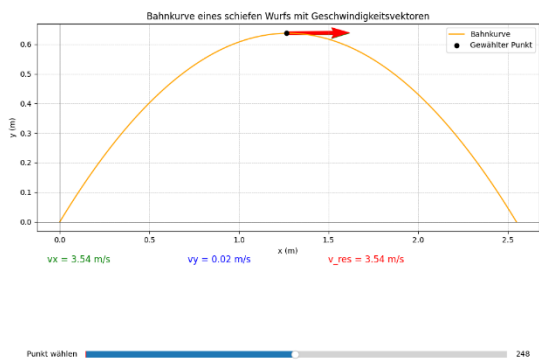


Dadurch können wir die beiden Vektoren der horizontalen Geschwindigkeit $\vec{v}_x$ (grün) und der vertikalen Geschwindigkeit $\vec{v}_y$ (blau) einzeichnen.



Dieses Verfahren funktioniert an einem anderen Punkt auf der Kurve.

Hier zeigt der blaue Pfeil $\vec{v}_y$ nach unten, weil ab dem höchsten Punkt der Bahn der Körper in Richtung Erde fällt.



Im höchsten Punkt der Bahn verschwindet der blaue Pfeil $\vec{v}_y$, weil der Körper dann weder steigt noch fällt.

Dann lässt sich auch kein Rechteck einzeichnen.

7.6. Stufe 6: Rechnen mit Vektoren

Die Berechnungen aus dem Abschnitt 7.3 lassen sich auch mit Vektoren durchführen.

Dazu benötigen wir ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in dem Anfangspunkt von $\vec{v}_s$ liegt.

Es gelten $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{res} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dann ist $\cos \alpha = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$ und $\alpha \approx 21,8^\circ$.

Weiterhin gilt $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r = 16$ und $s = 32$.

Der gesuchte Punkt am gegenüberliegenden Ufer ist $P(32|80)$ und die Abdrift beträgt $s = 32$ m.

Der Winkel für das Gegensteuern ergibt sich wegen $|\vec{v}_{res}| = \sqrt{21}$ und $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 21 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v}_{res} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{21} \end{pmatrix}$ zu $\cos \beta = \frac{-2 \cdot 0 + 21}{5 \cdot \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ und $\beta \approx 23,6^\circ$.

Es sei $\vec{v}_F$ eine Flugzeuggeschwindigkeit, $\vec{v}_W$ eine Windgeschwindigkeit und $\vec{v}_R$ die daraus resultierende Geschwindigkeit.

Hier gilt für $\vec{v}_F = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ und für $\vec{v}_W = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Der resultierende Vektor ergibt sich zu:

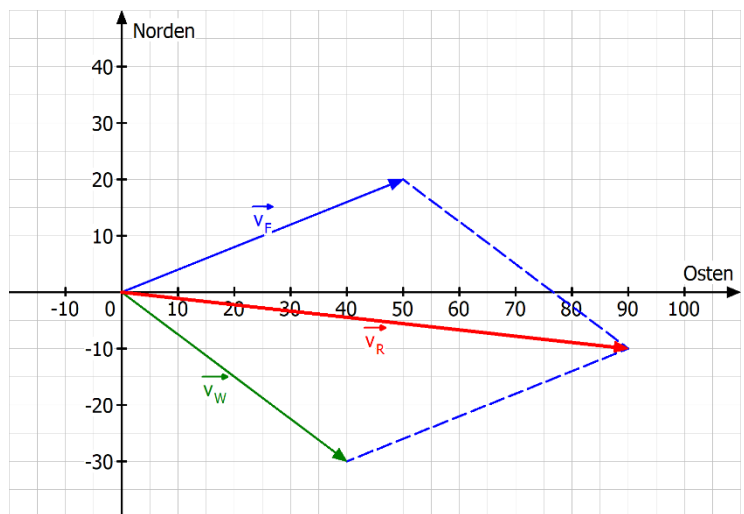
$$\vec{v}_R = \vec{v}_F + \vec{v}_W = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Die Beträge sind $|\vec{v}_F| = 10\sqrt{29} \approx 53,9$,

$|\vec{v}_W| = 50$ und $|\vec{v}_R| = 10\sqrt{82} \approx 90,6$.

Es gilt $53,9 + 50 \neq 90,6$, denn Vektoren können nicht wie Zahlen addiert werden.

Der Winkel $\sphericalangle(\vec{v}_F, \vec{v}_R)$ ist rund 28° groß. Das Flugzeug wird um diesen Wert in Richtung Süden abgetrieben.



In zweiten Fall existiert ein seitlicher Gegenwind.

Hier gilt für $\vec{v}_F = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \end{pmatrix}$ und für $\vec{v}_W = \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \end{pmatrix}$.

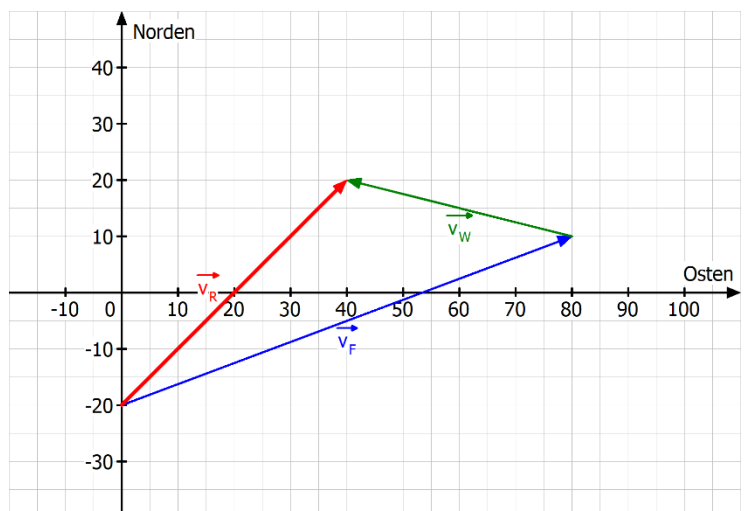
Der resultierende Vektor ergibt sich zu:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_F + \vec{v}_W = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Die Beträge sind $|\vec{v}_F| = 10\sqrt{73} \approx 85,4$,

$|\vec{v}_W| = 10\sqrt{17} \approx 41,2$ und $|\vec{v}_R| = 40\sqrt{2} \approx 56,6$.

Es gilt $85,4 + 41,2 \neq 56,6$, denn Vektoren können nicht wie Zahlen addiert werden.



Der Winkel $\sphericalangle(\vec{v}_F, \vec{v}_R)$ ist rund $34,6^\circ$ groß. Das Flugzeug wird um diesen Wert in Richtung Nordwest abgetrieben

7.7. Stufe 7: Das zugehörige Python – Programm

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider

# Funktion zur Umrechnung von Länge und Winkel in einen Vektor
def vector_from_polar(length, angle_deg):
    angle_rad = np.deg2rad(angle_deg)
    return np.array([length * np.cos(angle_rad), length * np.sin(angle_rad)])

# Initialwerte
length1, angle1 = 5, 30
length2, angle2 = 3, 120

# Plot einrichten
fig, ax = plt.subplots()
plt.subplots_adjust(left=0.25, bottom=0.25)
ax.axis('equal')
ax.set_xlim(-10, 10)
ax.set_ylim(-10, 10)

# Gitternetzlinien hinzufügen
ax.grid(True)

# Vektoren berechnen
vector1 = vector_from_polar(length1, angle1)
vector2 = vector_from_polar(length2, angle2)
sum_vector = vector1 + vector2

# Vektoren plotten mit Labels
arrow1 = ax.quiver(0, 0, vector1[0], vector1[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='r', label='Vektor 1')
arrow2 = ax.quiver(0, 0, vector2[0], vector2[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='b', label='Vektor 2')
arrow_sum = ax.quiver(0, 0, sum_vector[0], sum_vector[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='g', label='Summenvektor')

# Parallelogramm zeichnen mit Label
parallelogram = ax.fill(
    [0, vector1[0], sum_vector[0], vector2[0]],
    [0, vector1[1], sum_vector[1], vector2[1]],
    color='cyan', alpha=0.3, label='Parallelogramm')

# Legende anzeigen
ax.legend()

# Werte als getrennte farbige Überschriften
fig.text(0.1, 0.95, f'Länge Vektor 1: {length1:.2f}', color='r', fontsize=12)
fig.text(0.4, 0.95, f'Länge Vektor 2: {length2:.2f}', color='b', fontsize=12)
fig.text(0.7, 0.95, f'Länge Summenvektor: {np.linalg.norm(sum_vector):.2f}', color='g', fontsize=12)
```

```

fig.text(0.1, 0.9, f'Winkel: {np.rad2deg(np.arctan2(vector2[1], vector2[0]) - np.arctan2(vector1[1],
vector1[0])):.2f}°', color='orange', fontsize=12)

# Schieberegler erstellen
ax_length1 = plt.axes([0.25, 0.15, 0.65, 0.03])
ax_angle1 = plt.axes([0.25, 0.1, 0.65, 0.03])
ax_length2 = plt.axes([0.25, 0.05, 0.65, 0.03])
ax_angle2 = plt.axes([0.25, 0, 0.65, 0.03])

slider_length1 = Slider(ax_length1, 'Länge 1', 0.1, 10.0, valinit=length1)
slider_angle1 = Slider(ax_angle1, 'Winkel 1', 0, 360, valinit=angle1)
slider_length2 = Slider(ax_length2, 'Länge 2', 0.1, 10.0, valinit=length2)
slider_angle2 = Slider(ax_angle2, 'Winkel 2', 0, 360, valinit=angle2)

# Update-Funktion
def update(val):
    global vector1, vector2, sum_vector
    length1 = slider_length1.val
    angle1 = slider_angle1.val
    length2 = slider_length2.val
    angle2 = slider_angle2.val
    vector1 = vector_from_polar(length1, angle1)
    vector2 = vector_from_polar(length2, angle2)
    sum_vector = vector1 + vector2

    arrow1.set_UVC(vector1[0], vector1[1])
    arrow2.set_UVC(vector2[0], vector2[1])
    arrow_sum.set_UVC(sum_vector[0], sum_vector[1])

    # Parallelogramm aktualisieren
    parallelogram[0].set_xy([[0, 0], vector1, sum_vector, vector2])

    fig.texts.clear()
    fig.text(0.1, 0.95, f'Länge Vektor 1: {length1:.2f}', color='r', fontsize=12)
    fig.text(0.4, 0.95, f'Länge Vektor 2: {length2:.2f}', color='b', fontsize=12)
    fig.text(0.7, 0.95, f'Länge Summenvektor: {np.linalg.norm(sum_vector):.2f}', color='g', fontsize=12)
    fig.text(0.1, 0.9, f'Winkel: {np.rad2deg(np.arctan2(vector2[1], vector2[0]) - np.arctan2(vector1[1],
vector1[0])):.2f}°', color='orange', fontsize=12)

    fig.canvas.draw_idle()

# Ereignisse an Schieberegler binden
slider_length1.on_changed(update)
slider_angle1.on_changed(update)
slider_length2.on_changed(update)
slider_angle2.on_changed(update)

plt.show()

```

8. Hilfsmittel

Es gibt sehr viele Internetseiten, auf denen Simulation physikalischer Versuche angeboten werden.

Hier kann man sich ausprobieren und in einigen Fällen sogar Messwerte aufnehmen.

Simulationen können das reale Experiment nicht ersetzen. Hier drehen wir uns im Kreis, denn die Simulationen sind ja so programmiert, dass alles wie gewünscht funktioniert.

Das reale Experiment hingegen verlangt von uns überlegtes und genaues Arbeiten. Es erfordert den richtigen Umgang mit Problemen im Versuchsaufbau, mit Messfehlern und die Auseinandersetzung mit der korrekten Auswertung und kritischen Interpretation der Messergebnisse.

Simulationen herkömmlicher Art machen den Menschen nicht schlauer, sondern dümmer.

Anders ist es bei der Benutzung von Software, bei der ich selbst aktiv werden muss.

Ein erstes Beispiel ist Scratch 3, ein übersichtliche Programmierumgebung. Für Scratch gibt es eine Vielzahl von Anleitungen und Beispielen. Tatsächlich ist es möglich, die Bewegung von Körpern zu simulieren. Da es hier um das Programmieren geht, muss man vorher über den physikalischen Vorgang und die Umsetzung in der Programmierung nachdenken.

Die nächste Stufe wäre dann die Arbeit mit Python, weil Python eine übersichtliche, sehr mächtige und weit verbreitet Programmiersprache ist.

Wer kein Freund des Programmierens ist, kann die Simulationsumgebung Algodoo probieren, die inzwischen frei ist. Allerdings sein angemerkt, das Algodoo schon eine gewissen Lernkurve beinhaltet, um sinnvoll arbeiten zu können. Ansonsten bleibt man bei einer sinnlosen Spielerei stehen.